APANHADOS NA REDE

António Machiavelo
Universidade do Porto
ajmachia@fc.up.pt

NÚMEROS HIPERGIGANTESCOS

Suponha o leitor que entra num concurso em que ganha a pessoa que escrever, num minuto, o maior número natural numa página A5. Que número escreveria? Nesta pequena rubrica é descrita uma poderosa técnica para, usando muito pouca tinta, escrever números ultra-hipergigantescos. Poderá assim ganhar facilmente uma tal competição, sem dar sequer qualquer hipótese à grande maioria dos seus potenciais adversários.

Foto de Bobanny (domínio público)

Numa obra dirigida ao rei Gelão II de Siracusa, que ficou conhecida pelo nome de "O Contador de Areia", Arquimedes (*ca*. 287-212 AEC) exibe o poder de um sistema que desenvolveu para nomear números maiores do que aqueles que eram possíveis exprimir na nomenclatura então usada. Para melhor demonstrar as potencialidades do seu esquema, Arquimedes mostra que este permite exprimir o número de grãos de areia necessários para preencher todo o Universo, mesmo usando estimativas largas para o que as observações possíveis na altura permitiam inferir sobre as dimensões do Cosmos.

Para descrever o seu sistema, Arquimedes começa por observar que o último número a ter um nome próprio é a miríade, igual a 10.000. Por conseguinte, podiam expressar-se naturalmente todos os números até uma miríade de miríades, ou seja, dez mil miríades. Designa então estes de *números primeiros* e chama a dez mil miríades a unidade dos *números segundos*. Estes são os múltiplos desta unidade, até dez mil miríades dessa unidade, que é por sua vez a unidade dos *números terceiros*. Tudo isto pode então ser continuado até dez mil miríades da unidade dos números cuja ordem é precisamente dez mil miríades! Chega assim ao número que actualmente escreveríamos como $(10^8)^{10^8}$ (é um bom exercício perceber que assim é!).

Mas Arquimedes não pára aqui! Chamando a todos os números assim nomeados *números do primeiro período*, nomeia o último destes como sendo a unidade do *segundo* *período*, e usando toda a construção atrás descrita chega aos *números do terceiro período*. Prossegue até chegar aos números do período de ordem dez mil miríades, para nomear o último destes, que é dez mil miríades dos números de ordem dez mil miríades do período de ordem dez mil miríades! Deixamos ao leitor mais aventureiro o exercício de escrever este número na notação actual.

Uma tradução para inglês do texto de Arquimedes, com excelentes anotações, pode ser encontrada na página de Henry Mendell, em

http://www.calstatela.edu/faculty/hmendel,

num *link* intitulado "*Vignettes of Ancient Mathematics*", que contém muitas outras traduções anotadas de textos de filosofia e de matemática grega.

Num artigo intitulado "*Mathematics and Computer Science: Coping with Finiteness*", publicado na revista Science em 1976 (vol. 194, pp. 1235-1242), cujo texto está disponível em

http://www.sciacchitano.it/Spazio/Coping%20with%20Finiteness.pdf,

Donald Knuth actualiza as contas de Arquimedes, introduzindo uma notação para descrever números verdadeiramente gigantescos, com os quais o mestre grego não poderia sequer sonhar. Começando com $a \uparrow b = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{b}$, define $a \uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow a \uparrow \cdots \uparrow a}_{b}$ e, em geral,

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow \cdots \uparrow}_{n} b = \underbrace{a \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{n-1} (a \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{n-1} (a \cdots (a \underbrace{(\uparrow \cdots \uparrow}_{n-1} a))))}_{b \text{ cópias de } a}.$$

Isto é um exemplo de uma definição *recursiva*, que consiste em descrever um conceito à custa de casos mais simples do mesmo, de modo a que tudo se reduza eventualmente, num número finito de passos, a um caso base, sendo este claramente especificado. Usando a abreviatura $a \uparrow^n b$ para $a \underbrace{\uparrow \cdots \uparrow}_{n} b$, sendo $a, n \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}_0$, pode-se reescrever a definição dada de um modo um pouco mais conciso:

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1, & \text{se } b = 0; \\ a^b, & \text{se } n = 1; \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b-1)), & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Exercício para os mais corajosos: "entender" a grandeza de $3 \uparrow^4 3$.

John H. Conway criou uma notação que permite exprimir facilmente números ainda maiores! Para tal introduziu aquilo a que agora se chama *cadeias de Conway*, objectos do tipo $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_n$, onde $a_i \in \mathbb{N}$. Estas representam números que são definidos recursivamente do seguinte modo, onde $\mathcal{C}$ representa uma cadeia arbitrária e $a, b \in \mathbb{N}$:

1. Uma cadeia sem setas, a, representa o próprio número a;
2. $a \to b$ significa a^b;
3. $\mathcal{C} \to a \to 1$ é igual a $\mathcal{C}$:
4. $\mathcal{C} \to 1 \to (b+1)$ é igual a $\mathcal{C}$:
5. $\mathcal{C} \to (a+1) \to (b+1)$ é igual a $\mathcal{C} \to (\mathcal{C} \to a \to (b+1)) \to b$

Há que ter algum cuidado na aplicação desta definição, pois uma cadeia é para ser vista como um todo, não havendo aqui nenhum tipo de associatividade. Por exemplo, o leitor pode verificar que os números $2 \to 3 \to 2$, $(2 \to 3) \to 2$ e $2 \to (3 \to 2)$, são todos diferentes. Para mais informações, ver

http://en.wikipedia.org/wiki/Conway_chained_arrow_notation

e também

http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Conway_chained_arrow_notation

É um excelente exercício mostrar que $a \to b \to n$ é igual a $a \uparrow^n b$, assim como tentar compreender a dimensão de um número como $5 \to 4 \to 3 \to 2$. E qual é maior, este último número ou $4 \to 3 \to 4 \to 2$?

Que utilidade tem tudo isto? Há algumas modestas aplicações, aparecendo alguns destes números ultramonstruosos em certas considerações combinatórias. O exemplo mais famoso é o chamado *número de Graham*. Sobre este assunto, ver:

http://en.wikipedia.org/wiki/Graham's_number.

Por outro lado, estas construções ajudam a entender melhor o próprio conceito de recursividade, desempenhando um papel relevante em teoria da computação. Para mais detalhes, consultar:

http://en.wikipedia.org/wiki/Ackermann_function.

Mas, acima de tudo, estas "brincadeiras" de criação de nomenclatura numérica servem para exercitar um pouco a imaginação, o que é muito mais do que pode ser dito dos concursos com que vários canais de televisão bombardeiam os seus incautos telespectadores!