



AMÍLCAR BRANQUINHO
Universidade de
Coimbra
ajplb@mat.uc.pt

TOMOGRAFIA DE PAPEL

Caro Leitor,

Com este canto abrimos o tema da modelização de processos complexos a partir de exemplos simples, mas claros, do como funciona. Esperamos, desta forma, levar o leitor a interessar-se por Matemática mais evoluída e sofisticada.

Este canto começa no dia, em que depois de um bom jogo de futebol no Estádio Universitário de Coimbra, uma fractura nos levou ao Hospital Universitário. O médico ortopedista disse-nos que se tratava de uma fractura do rádio, e que se teria de efectuar um raio X para que a história clínica ficasse completa. Confessou-nos que tinha desenvolvido visão de raio X mas que era melhor guardarmos segredo. . .

Tentamos explicar-lhe que estes exames, e outros relacionados com os raios X, encerram conceitos matemáticos importantes e muito interessantes, mas que, provavelmente não contribuiria para a melhora da sua visão e até do seu desempenho. Este episódio levou-nos a tentar expor, de forma simplificada sem minimizar os conceitos de Matemática fundamental associados, alguns processos relacionados com os raios X. Ainda que não seja difícil reconhecer a importância prática de estudar Matemática, relativamente poucos aceitariam que a Matemática da vida quotidiana possa ser um tema atractivo para reflexão ociosa.

Desde os anos 70 se têm desenvolvido métodos para cortar as pessoas de forma virtual, ainda que os reais sejam mais efectivos e de longe mais antigos, que têm grande utilidade na prática médica. Aqui vamos dar uma pequena introdução à

reconstrução algébrica, próxima do método que actualmente é usado nas tomografias axiais computadorizadas. Neste tipo de *tomografias*, processo radiológico que permite obter uma imagem nítida de um só plano de corte de órgão, com apagamento dos outros planos, utiliza-se a diminuição da intensidade que sofrem os raios-X ao atravessar os tecidos.

CONSIDERAÇÕES SOBRE O MODELO

É sabido que nem a pessoa mais robusta pode deter a passagem dos raios X, pode até tornar-se um super-herói ou um super-maléfico.

O que se sabe é que quando um tecido é atravessado por um fino feixe de raios X com intensidade I , a diminuição desta intensidade depende da densidade, ρ , do tecido e do seu diâmetro. Se dividirmos a zona atravessada pelos raios em pequenas regiões infinitesimais, onde a densidade pode ser considerada constante, será natural supor que a intensidade diminua directamente com estas duas quantidades, podemos até adimensionalizar o problema de forma a ter 1 como constante de proporcionalidade (cf. Figura 1). Tomando limite quando o diâmetro de cada região vai para 0, obtemos

$$-dI = \rho I dx \text{ e portanto } -(\ln I)' = \rho .$$

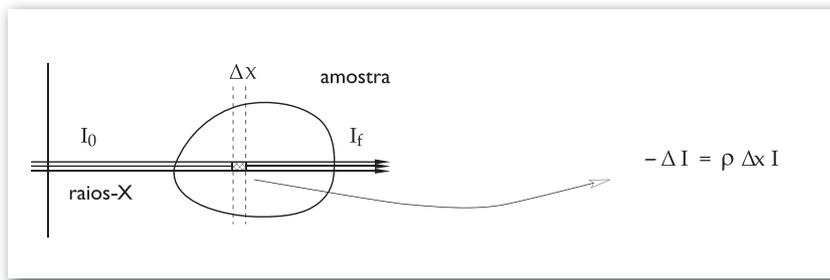


Figura 1

Assim, se denotarmos por I_0 e I_f as intensidades dos raios-X inicial (ao entrar na amostra) e final (à saída), temos depois de integrar

$$\ln I_0 - \ln I_f = \int \rho.$$

Vemos assim, que conhecendo as intensidades, inicial e final dos raios-X, podemos calcular os integrais da densidade ao longo de linhas rectas, L , que os raios traçam.

Introduzimos uma malha quadrangular de $M \times M$ quadrados sobre a região a analisar. Se a malha for suficientemente fina, a densidade, $\rho_{i,j}$, pode considerar-se constante em cada quadrado, $c_{i,j}$. Por outro lado, a diminuição da intensidade do feixe de raios-X ao longo da recta L , permite-nos conhecer $\int_L \rho$ que se aproxima por uma soma de Riemann, tendo-se

$$\ln(I_0/I_f) = \int_L \rho = \sum \rho_{i,j} |c_{i,j} \cap L|.$$

Aparentemente o problema está resolvido, calculando o valor das densidades $\rho_{i,j}$ com $i, j = 1, \dots, M$ a partir do sistema de equações lineares anterior, que deriva do conhecimento de um número suficiente de feixes de raios-X.

No entanto, este modelo, apesar da sua simplicidade, não é satisfatório na prática devido à sua lentidão e imprecisão. Parte da imprecisão deriva de somente termos resultados aceitáveis quando o sistema linear associado tem dimensões gigantescas. Para evitar esta situação considera-se, no modelo anteriormente descrito, que ρ é uma função contínua. Aparecem-nos assim as designadas *transformadas de Radon*, que são integrais curvilíneas de funções escalares, para medir a sombra da amostra. Em 1917, J. Radon mostrou como recuperar a função densidade a partir do conhecimento da sombra da amostra.

Podíamos pensar, mais uma vez, que o problema acaba aqui, mas tal não é certo, pois há todo um trabalho de Cálculo Numérico, não desprezável, a desenvolver, mas este não vai ser objecto deste canto.

MEDIR A INTENSIDADE DA LUZ.

Antes de avançar para a construção do nosso modelo, vamos ensinar a medir a intensidade de luz.

É sabido que uma vela colocada a uma distância dupla de uma outra dá uma luz menos intensa. Pode dizer-nos quantas vezes menos intensa? Duas vezes?

Não. De facto, mesmo que colocássemos duas velas não obteríamos a mesma intensidade de luz da colocada

à distância inicial. Para conseguir a mesma intensidade necessitaríamos de 4 velas. A uma distância tripla da inicial, por forma a obtermos a mesma intensidade de luz inicial, necessitaríamos de 9 velas. . .

Isto acontece porque a intensidade da luz é inversamente proporcional ao quadrado da distância a que se coloca o foco. Esta é a lei da diminuição da intensidade da luz com a distância.

Conhecida a lei, vamos aplicá-la para comparar a intensidade de duas lâmpadas, ou em geral de duas fontes de luz com intensidade distinta. Por exemplo como procederia para analisar quantas vezes brilha mais uma lâmpada que uma vela? Vejamos então quantas velas necessitamos para obter a intensidade da luz que a lâmpada nos dá.

Para tal coloque a vela e a lâmpada acesas num extremo de uma mesa, e o no outro uma folha de cartolina verticalmente relativamente ao tampo da mesa. Diante da folha coloque, também verticalmente, um lápis. Este lápis projectará sobre a cartolina duas sombras, uma que provém da luz emitida pela vela e outra pela luz emitida pela lâmpada. A densidade das sombras não é igual. Aproxime a vela do lápis até conseguir que as densidades sejam iguais. Nessa altura só terá que medir as distâncias e aplicar a fórmula indicada anteriormente.

CONSTRUÇÃO DO MODELO

Vamos tentar explicar os rudimentos do processo indicado atrás, substituindo os tecidos por uns cubinhos translúcidos, por forma a ilustrar a reconstrução algébrica. O modelo que passamos a descrever foi idealizado pelo nosso amigo Fernando Chamizo nas suas lições de "Cálculo Diferencial e Integral".

Vamos necessitar de cartolina, plástico semi-transparente e uma lanterna.

Com a cartolina fabricamos nove cubos, e nas suas faces laterais abrimos janelas para que possa passar a luz. Estas janelas vão ser cobertas em alguns destes cubos com o plástico

semi-transparente. Ao pôr três cubos seguidos e enfocados com a luz da lanterna, podemos detectar no monitor (uma folha de cartolina) quatro possíveis intensidades, dependendo de nenhum, um, dois ou os três cubos têm plástico nas suas janelas (cf. Figura 2). Convencionalmente designaremos estas intensidades por $I = 1, 1/2, 1/3, 1/4$, respectivamente. Será importante que se familiarize com elas por forma a poder distingui-las à vista desarmada. Caso não consiga distinguir as intensidades deve mudar de plástico.

Disponhamos os cubos formando quadrado (pode até solicitar a alguém que o faça por si e que tape o resultado com uma folha). Dirigiremos o foco da lanterna nas três direcções horizontais, nas três direcções verticais e nas três direcções oblíquas (correspondentes a três das quatro esquinas). Desta forma obteremos uma relação entre os números de cubos semi-transparentes nas secções considerados e as intensidades registadas. Suponhamos que numeramos os cubos como na Figura 3, e atribuiremos o valor 0 ao i -ésimo cubo, C_i , se estiver oco, e o valor 1, se for semi-transparente. Temos assim as relações

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= I_1^{-1} - 1 \\ C_4 + C_5 + C_6 &= I_2^{-1} - 1 \\ C_7 + C_8 + C_9 &= I_3^{-1} - 1 \\ C_1 &= I_7^{-1} - 1, \quad C_7 = I_8^{-1} - 1 \\ C_1 + C_4 + C_7 &= I_4^{-1} - 1 \\ C_2 + C_5 + C_8 &= I_5^{-1} - 1 \\ C_3 + C_6 + C_9 &= I_6^{-1} - 1 \\ C_9 &= I_9^{-1} - 1 \end{aligned}$$

No caso da Figura 3 obteríamos o vector das intensidades

$$\begin{aligned} I &= (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9) \\ &= (1/3, 1/2, 1/2, 1/2, 1/3, 1/2, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Temos então que resolver um sistema de nove equações a nove incógnitas. Pode ver-se que este sistema é possível e indeterminado, mas como procuramos soluções C_i em $\{0, 1\}$, obtemos uma única solução. Acrescentando uma nova relação, i.e. $I_{10} = 1/2$, que passa pela esquina C_3 , obtemos finalmente um sistema determinado

$$\begin{aligned} C &= (C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9) \\ &= (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

O que acabámos de fazer foi obter a composição e a estrutura da matriz de cubos sem necessidade de a decompor,

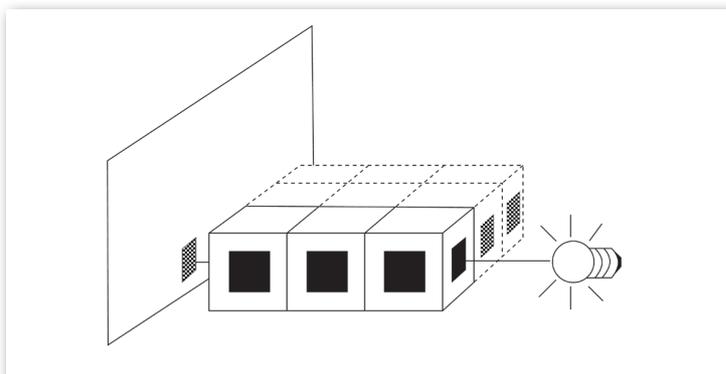


Figura 2

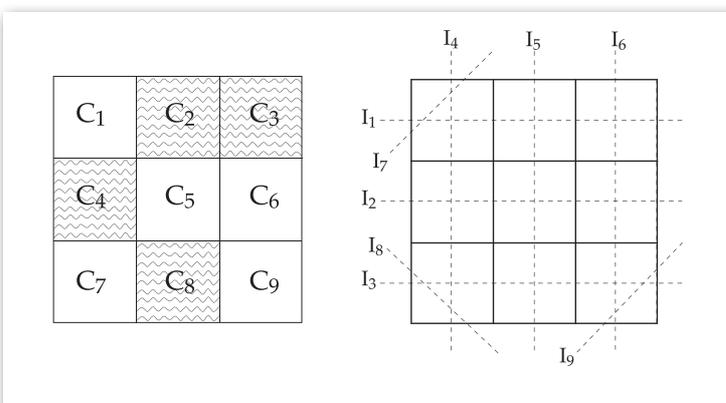


Figura 3

e usando simplesmente a informação obtida pelos raios de luz que a atravessam.

DO LÚDICO AO PRÁTICO

A experiência que acabámos de descrever dá-nos a ideia de como se fazem as tomografias axiais computadorizada. Há, no entanto, um abismo de dificuldades para levar esta ideia à prática.

Suponhamos, por exemplo, que desejamos ter uma resolução comparável a de um monitor, e para tal imaginamos um reticulado de 1000×1000 pixels que contém a secção do corpo humano que vamos examinar. Isto leva-nos a considerar 10^6 variáveis, que representam a densidade (opacidade aos raios X) em cada pixel. O sistema linear correspondente terá uma matriz de dimensão $10^6 \times 10^6$. As estimações gerais do número de operações para resolver um sistema linear, por eliminação de Gauss, é da ordem do cubo do número de variáveis, no nosso caso 10^{18} . Mesmo com o auxílio dos computadores mais rápidos não poderia ser resolvido em tempo útil, o que não ajudaria a reduzir as listas de espera nos hospitais!