



JORGE NUNO SILVA  
Universidade de Lisboa  
jnsilva@cal.berkeley.edu

## A INFORMALIDADE DA LÓGICA FORMAL

Raymond Smullyan é bem conhecido por ser um lógico e filósofo eminente. A sua obra mais popularizada, contudo, pertence à matemática recreativa. Nesta área são de leitura obrigatória “The Lady and the Tiger” (Dover, 2009), focado em *puzzles* lógicos, e “The Chess Mysteries of the Arabian Knights” (Oxford, 1992), um tratado de análise retrógrada em problemas de xadrez, para citar somente duas das suas muitas obras.



A mais recente publicação de Raymond Smullyan, “Logical Labyrinths” (AK Peters, 2009), é utilizada em Harvard num curso semestral de Lógica, contudo Smullyan continua a utilizar os *puzzles* como fio condutor e motivador da narrativa científica. O rigor e a profundidade da obra não saem diminuídos desta associação, antes colaboram na produção de um texto divertido e motivador que, partindo da informalidade de um quebra-cabeças, atinge toda a formalidade de lógica de primeira ordem.

A acção desenrola-se de início na já habitual ilha dos seres de dois tipos, os Verdadeiros, que falam sempre verdade, e os Falsos, que sempre mentem.

Os primeiros quebra-cabeças são clássicos. Vejamos dois exemplos.

1. No dia da sua chegada à ilha, o visitante Abercrombie encontra três habitantes: A, B e C. Pergunta a A: “Você é Verdadeiro ou Falso?”, mas não ouve a resposta. Diz o B: “Ele disse que é um Falso”, mas C acrescentou: “Não acredite em B, está a mentir”. **O que é que se pode concluir sobre C?**

2. Se os três nativos tivessem respondido:

A: "Exactamente um de nós é Falso."

B: "Exactamente dois de nós são Falsos."

C: "Somos todos Falsos."

**Qual seria a natureza de cada um?**

Para preparar caminho à correcta utilização de quantificadores, Smullyan propõe um outro tipo de questão:

Numa visita de Abercrombie, todos os habitantes lhe disseram "Somos todos da mesma natureza". O que é que pode o nosso visitante concluir? E se a afirmação geral fosse "Alguns de nós são Verdadeiros, outros são Falsos"?

Numa outra ilha, ouviu Abercrombie de todos: "Alguns Falsos desta ilha fumam." O que é que se pode concluir sobre os hábitos tabágicos dos ilhéus?

Para ilustrar a natureza de alguns conjuntos infinitos, Raymond Smullyan propõe variantes do seguinte jogo: Um jogador escolhe dois números inteiros,  $a$  e  $b$ . O segundo tem direito a um palpite por dia (isto é, pode nomear um inteiro), na tentativa de acertar em ambos. Será que existe uma estratégia que garanta ao segundo jogador ganhar em tempo finito?

A discussão das estratégias empregues promove a compreensão sobre conjuntos numeráveis (no nosso exemplo,  $\mathbb{Z}^2$ ).

Imaginemos um livro com uma infinidade de páginas: página 1, página 2, ..., página  $n$ , e que cada página contém a descrição de um conjunto de números naturais. Será que este livro pode conter a descrição de todos os conjuntos de números naturais?

O Princípio de Indução é também invocado nas viagens de Abercrombie.

Numa ilha que visitou há pouco, ouviu de um nativo: "Não é a primeira vez que lhe digo isto." O que é que pode Abercrombie concluir sobre a natureza do seu novo amigo?

A prova de que todos os cavalos têm a mesma cor é feita por indução. Vejamos sucintamente a hereditariedade, visto o caso inicial ser trivial. Consideremos  $n + 1$  cavalos:  $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}$ . Por Hipótese de Indução, sabemos que qualquer conjunto de  $n$  cavalos é monocromático, o que se aplica a

$$\{C_1, \dots, C_n\} \quad \text{e} \quad \{C_2, \dots, C_{n+1}\}.$$

Tomando agora a união destes conjuntos, obtemos o resultado pretendido.

Essencialmente por este método, já Tom Apostol tinha demonstrado, no seu livro de cálculo, que todas as loiras têm olhos azuis!

Da contracapa traduzimos parte do texto de Martin Gardner, um dos seus últimos escritos: "Desde que Lewis Carroll escreveu sobre Lógica, nenhum outro especialista produziu um texto tão saturado com problemas deliciosos, paradoxos, piadas e implicações filosóficas para além do professor Raymond Smullyan no seu "Logical Labyrinths" [...] Trata-se de um volume que somente Ray poderia ter escrito e será certamente utilizado nas universidades por muitos anos."

