

## INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR

Ana Paula Santana e João Filipe Queiró  
(488 páginas; €18,17)

Um dia alguém disse que quando um livro de Matemática tem no título «Introdução...», há que ter muito cuidado: geralmente são os melhores e também os mais completos. Este livro de Ana Paula Santana e João Filipe Queiró, editado pela Gradiva como 10º volume da colecção Trajectos Ciência, não foge à regra. Aliás, se dúvidas houvesse bastaria ler o prefácio para as dissipar. Diz assim:

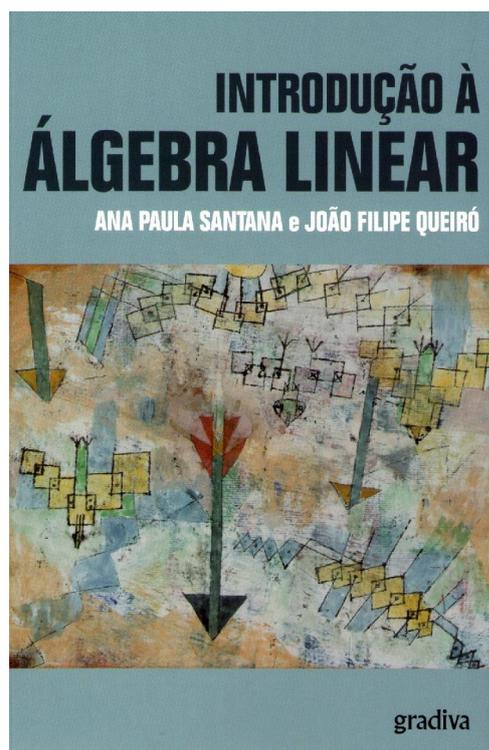
«... em muitos cursos de Engenharia, Economia e Ciências apenas se dedica um semestre à Álgebra Linear, o que levanta um problema de selecção de matérias e de escolha na ordem da exposição.

A nossa opção foi abordar inicialmente a parte mais concreta e computacional da Álgebra Linear. Em seguida, começamos o estudo da “geometria linear”, mas ainda apenas no contexto particular de  $\mathbb{R}^n$ . Em ambos os capítulos as demonstrações dos teoremas são levadas a cabo tanto quanto possível usando apenas a estrutura linear de  $\mathbb{R}^n$ , evitando utilizar coordenadas.

...

Antes dos espaços vectoriais estudamos a geometria analítica do 1º grau. Logo a seguir, abordamos o importante tema dos vectores próprios e valores próprios de matrizes quadradas, referindo algumas aplicações interessantes, incluindo a clássica geometria analítica do 2º grau, mas também outras mais modernas, como a decomposição dos valores singulares, a compressão de imagens e o funcionamento do Google. Faz-se o estudo completo da forma normal de Jordan, incluindo a sua unicidade.

Os capítulos finais são dedicados à Álgebra Linear abstracta, estudando-se e classificando-se os espaços vectoriais gerais sobre corpos arbitrários (incluindo os espaços de dimensão infinita), as transformações lineares entre eles, e os espaços com produto interno.»



Está tudo e com todo o rigor, pois:

«O livro caracteriza-se também por todos os resultados fundamentais serem demonstrados (exceptuando-se três, o teorema Fundamental da Álgebra, o Lema de Zorn e o Teorema de Schröder-Bernstein, que não são parte da Álgebra Linear).»

Além disso, o livro contém inúmeros exemplos e exercícios propostos, porém :

«As várias secções terminam com exercícios, mas optámos por quase não incluir exercícios numéricos. Há no texto muitos exemplos práticos ilustrativos completamente tratados, mas os exercícios orientam-se em geral para o estudo de factos adicionais, por vezes necessários mais tarde no próprio texto, outras vezes abrindo perspectivas para desenvolvimentos e explorações.»

No entanto, aqueles que necessitem de exercícios com um carácter mais numérico, sugestões para a resolução dos exercícios, as suas soluções ou ainda de complementos sobre o texto, podem recorrer a um endereço electrónico onde todos estes aspectos se encontram ao dispor.

Tal como mencionado no prefácio, o livro serve a todos, na verdade:

«As matérias estudadas num curso introdutório de Álgebra Linear são razoavelmente standard. Uma característica deste livro é a apresentação sistemática dessas matérias, mas de forma modular, de modo a ser possível conceber vários cursos com ele.

Em particular, uma disciplina semestral de Álgebra Linear que não tenha como objectivo principal o estudo dos espaços vectoriais pode ser construída a partir dos capítulos 1 a 7. Pensando nesse cenário, incluímos nos capítulos 4 e 5 uma breve referência aos espaços abstractos e aos produtos internos abstractos. Uma disciplina semestral em que se deseje contemplar esses espaços de forma profunda e completa pode tratar os capítulos 1 a 3 e depois passar directamente para o capítulo 8, com referências ocasionais a temas tratados nos capítulos anteriores.

São possíveis outras configurações e outros usos do texto, inclusive para disciplinas mais avançadas ou como apoio a disciplinas de Análise Numérica ou Álgebra Linear Numérica.»

De facto, um bom aluno de outra disciplina que, numa primeira abordagem, esteja apenas interessado nos resultados poderá, sem dificuldade, ler o texto sem atender às demonstrações, estudar os exemplos e, mais tarde, se assim o entender, deter-se em todos os detalhes matemáticos.

Para o leitor ficar com uma ideia mais concreta do seu conteúdo, listamos os títulos dos capítulos:

- 0 Os números complexos
- 1 Matrizes
- 2 Sistemas de equações lineares
- 3 Determinantes
- 4 O espaço  $\mathbb{R}^n$ , subespaços, dimensão
- 5 Ângulos e distâncias em  $\mathbb{R}^n$
- 6 Planos em  $\mathbb{R}^n$
- 7 Valores próprios e vectores próprios de matrizes
- 8 Espaços vectoriais
- 9 Transformações lineares
- 10 Espaços vectoriais com produto interno
- 11 Apêndices

Nos Apêndices temos: História dos números complexos; Permutações; Teorema de Laplace; Teorema de Perron; Cardinais e, por fim, uma introdução a alguns comandos do Matlab.

O livro termina com uma completa Bibliografia, um índice de símbolos e um índice alfabético.

Em resumo: um excelente livro. Completo, preciso, conciso e que ficará, cremos, como uma referência na área, por muitos anos.

Luís Trabucho de Campos  
FCT/UNL



## TREZE VIAGENS PELO MUNDO DA MATEMÁTICA

Carlos Correia de Sá e Jorge Rocha (Editores)  
(U. Porto Editorial; 566 páginas)

A expressão “ficar a meio do caminho” está habitualmente conotada com alguma insatisfação, como se o objectivo final de uma jornada ficasse por cumprir. Mas aqui, vamos utilizá-la com outro sentido e, por isso, não deixa nenhum amargo de boca dizer que *13 Viagens pelo Mundo da Matemática* fica a meio do caminho entre um livro de divulgação e um volume para especialistas ou candidatos a especialistas. Simplificando muito a abordagem, digamos que o livro alberga mais fórmulas e teoremas do que o leitor comum, pouco habituado à notação e ao jargão matemáticos, costuma tolerar, não estando, contudo, elaborado num tom demasiado hermético, nem caindo na ratoeira de afunilar os temas para lá do que seria razoável numa publicação deste género. Esta aparente indefinição poderia ser um defeito e um estorvo à

clareza se os editores pretendessem criar um livro para todos ou, em alternativa, encaminhá-lo na direcção de uma ou duas populações de investigadores. Como a intenção, sublinhada na introdução de Carlos Sá e Jorge Rocha, foi precisamente a de preencher esse espaço intermédio, *13 Viagens pelo Mundo da Matemática* nunca sofre do mal de querer ser um livro que não é. E tem outras virtudes. A primeira das quais passa, sem dúvida, pela escolha dos temas. A opção de misturar detalhes importantes de tópicos muito gerais (como a Teoria dos Números, a Lógica, a Geometria, a Convergência de Séries ou a Teoria de Grafos) com exemplos de aplicações relevantes (que incluem a noção de perspectiva na pintura renascentista e a criptografia), juntando pelo meio algumas curiosidades (onde fica o centro de Portugal? quantos pontos existem numa linha recta? de quantas cores precisamos para colorir um mapa?), permite que o leitor mais exigente não fique refém de uma superficialidade pouco estimulante, piscando simultaneamente o olho a quem pretenda seguir estas viagens com alguma leveza ou não possua os conhecimentos imprescindíveis para perceber todos os pormenores, sobretudo os mais exigentes do ponto de vista científico. Será natural que o leitor com uma formação menos robusta em matemática tropece nalguns problemas técnicos ao longo dos diversos capítulos, mas (e esta é também uma boa lição deste livro) não há razões para desânimo pois, tantas vezes, o aparecimento de dificuldades inesperadas acaba por contribuir, logo em seguida, para tornar mais fácil a vida das pessoas. Quando, no intervalo do almoço, antes de atacarmos o arroz de pato, preparamos as férias de Verão e pagamos, *online*, um quarto em Istambul com o número do cartão de crédito que trazemos na carteira, estamos implicitamente a confiar na matemática que protege os nossos dados da cobiça de piratas e gatunos. Na verdade, a confidencialidade da transacção pode ser garantida porque é provável que um processo de codificação semelhante ao RSA (criado em 1978) esteja em funcionamento, e “o Sistema RSA baseia a sua segurança na dificuldade em factorizar números com um certo tamanho, quando comparada com a relativa facilidade em gerar números primos da mesma ordem de grandeza” (A. Machiavelo, p. 59). A percepção da dificuldade e a identificação de formas menos agrestes de chegar a bom porto são, historicamente, duas alavancas complementares para o sucesso da nossa civilização, como aliás se percebe nesta passagem: “as relações entre medidas de amplitude de ângulos e medidas de comprimento de segmentos serão instrumentos essenciais para a determinação de distâncias, em particular para a cartografia e a medição de terrenos, uma vez que a medição directa de ângulos é tarefa muito mais facilmente executável do que a medição directa de distâncias”. Esta última citação faz parte de um fragmento do capítulo “Geometria: da intuição ao rigor”, talvez o texto mais exigente desta colectânea, pois o autor preocupa-se essencialmente com problemas

relacionados com os fundamentos da Geometria, a montante daqueles que costumam surgir nas salas de aula. No entanto, António Bivar desmonta, com cuidado e talento, cada um desses problemas, pelo que vale a pena não saltar este capítulo – um dos mais bem escritos do livro (embora algumas longas notas de rodapé pudessem ter sido incluídas no corpo do texto) – para perceber como determinados conceitos empíricos motivaram o aparecimento dos objectos e das relações básicas da Geometria, dando forma, primeiro, à axiomática de Euclides e, mais tarde, à de Tarski.

A frequente presença de exemplos e figuras (se espera um bloco uniforme de texto, desengane-se; trata-se de um livro bem e abundantemente ilustrado), coloca a intuição do leitor sob uma atenção especial, sendo esta espiciada sempre que necessário, apesar de aqui e ali surgirem alertas para as armadilhas do tipo mais comum de intuição que, segundo Maria Pires de Carvalho, “naturalmente se alimenta de cenários finitos” e o infinito é, como se costuma dizer, outra loiça. Alguns dos autores, para além do imprescindível conteúdo matemático, preocupam-se com a inclusão de actividades dirigidas a alunos e curiosos. Quem se interessa por novas tecnologias (em rigor, cada vez menos novas) gostará de saber que Samuel Lopes, no capítulo “Espelhos meus”, inventa algumas boas receitas para trabalhar certos problemas geométricos através da mediação gráfica do programa Geogebra.

Se é verdade que o livro apresenta quase sempre uma grande qualidade na forma como ilumina os assuntos, também não será mentira que muitos desses assuntos são objecto de vasta literatura pelo mundo fora. Assim, merecerá provavelmente destaque a originalidade do capítulo que António Guedes de Oliveira escreveu sobre decomposições perfeitas de rectângulos (decomposições em quadrados distintos), introduzindo na resolução do problema, de forma elegante e engenhosa, o uso de poliedros. Ainda que o livro exiba uma louvável diversidade de estilos, julgamos que haveria algo a ganhar com um pouco mais de coerência na estrutura interna dos capítulos. Percebe-se um acentuado contraste entre a forma livre de alguns textos e a arrumação mais convencional de outros, que separam as definições e os teoremas da restante prosa. Ao contrário de grande parte das publicações com origem nas Universidades portuguesas, *13 Viagens pelo Mundo da Matemática* tem uma paginação cuidada (de José Carlos Santos), o que facilita a leitura, mesmo nas partes mais densamente povoadas por notação matemática. A ideia de incluir bibliografias comentadas em vez de apenas listas de títulos parece-nos muito adequada ao âmbito desta edição. Treze, afinal, é número da sorte. Mas só para quem ler este livro (e é o que deve fazer sem temor nem demora).

Daniel Pinto  
FCT/UC