CANTO DÉLFICO

Alexander Kovačec
Universidade de Coimbra
kovacec@mat.uc.pt

RENOVAÇÃO DE CASAS NA VILA DE POUCO-LARGAS E NA ALDEIA DE MUITO-ESTREITAS*

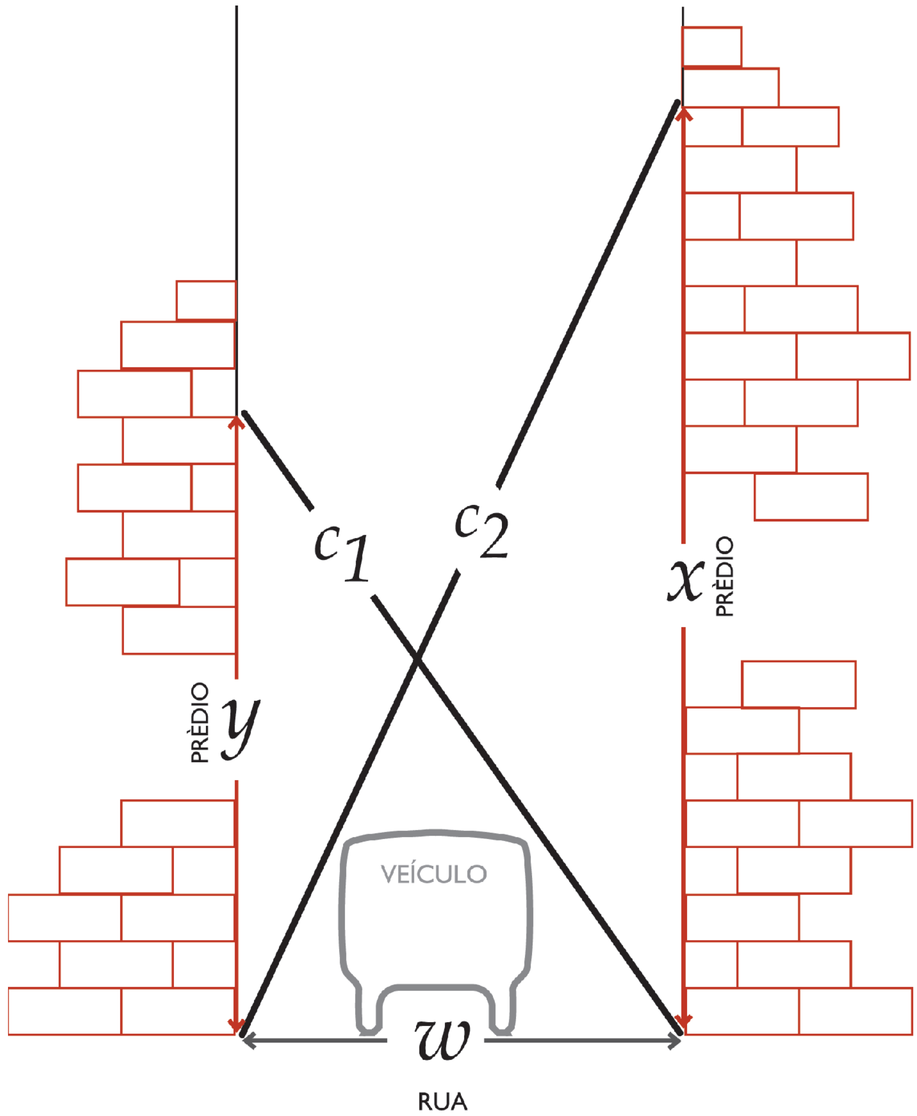
Súmula: apresenta-se um problema de índole geométrica e o seu inverso, os quais podem surgir na construção civil. Pensamos que são acessíveis para alunos a partir do 10º ano. A solução de um dos problemas levará a um polinómio do quarto grau, mostrando assim que há problemas do dia-a-dia em que tais polinómios podem surgir.

Na Vila de Pouco-Largas há dois prédios que precisam de renovação. Situam-se em lados exactamente opostos dum beco tão estreito que para fixar as escadas usadas para aceder às paredes, o melhor é encostá-las com as suas extremidades inferiores na base das paredes opostas. Sabe-se a largura w da rua e as alturas x e y onde as paredes das casas precisam de tinta fresca. A empresa quer saber exactamente os comprimentos precisos c_1 e c_2 das escadas, enquanto a repartição responsável pelas obras gostaria de saber que veículos podem passar por baixo das escadas. Veja a figura.

Problema 1. Escreva um curto relatório útil tanto para os empreiteiros como para a Junta de Freguesia, contendo de forma convincente a resolução das questões colocadas. Quanto aos carros, tente dar uma resposta que caracterize por uma desigualdade linear exactamente a largura e a altura dos veículos que podem passar.

A pacata Aldeia de Muito-Estreitas tem igualmente um número elevado de casas em sítios opostos que precisam de renovação. Ela tem o problema inverso ao exposto, que é bem mais complexo. Existem apenas duas escadas potencialmente

*O autor agradece a Bernardete, aos editores e à designer que contribuíram muito para que o português e o desenho do presente autor apareçam a uma luz mais favorável.



úteis na aldeia. Estas têm comprimentos conhecidos c_1 e c_2. Para não enfurecer os peões exige-se que a passagem formada pelas escadas tenha uma certa altura mínima h. Assim, a Freguesia encomenda um relatório relativamente ao problema seguinte.

Problema 2. Quais são as alturas mínimas das casas e larguras máximas das ruas que permitam colocar as referidas escadas tal como na figura e de modo a que pessoas de alturas menores do que h possam passar por baixo delas sem se baixarem? Resolva sem meios electrónicos: se temos escadas de comprimentos $c_1 = 4\ m$; $c_2 = 10\ m$; mas não há prédios na aldeia com mais do que 9.5 m de altura, podemos criar um túnel pelo qual homens de 2 m de altura possam passar sem se baixarem? (As pontas das escadas devem apoiar-se nas paredes; não devem exceder a altura das paredes.)

Nota: para uma solução *exacta* das questões relativamente às alturas mínimas e larguras máximas será necessário encontrar uma raiz positiva de uma equação do quarto grau. Pode mostrar-se que os polinómios que aqui surgem têm exactamente uma tal raiz e que esta pode ser determinada por meios numéricos. No entanto, não são necessários meios electrónicos para resolver a segunda questão.

Para o leitor aprofundar os seus conhecimentos da teoria das equações de grau superior, podemos aconselhar artigos publicados na *Gazeta* da autoria de António Pereira Rosa; ver [1], [2].

As soluções propostas têm, em relação a soluções geométricas, não apenas o mérito de serem mais exactas, mas sobretudo de serem implementáveis num programa. Assim, centenas de problemas deste tipo podem ser solucionados pressionando uns botões: *nada é mais prático do que uma boa teoria*, dizia pessoa famosa cujo nome agora não recordo.

Naturalmente haverá outros enredos em que o cerne das questões geométrico-algébricas aqui tratadas pode ser 'vendido'; e muito gostariam, outros leitores, professores da *Gazeta* (e nós), de saber de solucionistas que encontrem tais contextualizações diferentes.

Bom, como temos ainda espaço disponível, prosseguimos com a solução de um problema do **Canto Délfico na Gazeta Nº 159, Dezembro de 2009**: **Máquinas de Turing**. Pedimos, entre outros, a solução do seguinte:

1R2	1R2
0L6	0R3
0L4	0R2
0L4	1R5
1L6	
0L6	1O7

Problema 1. Mostre que o conjunto $X = \{1, 3, 5, ...\}$ dos naturais ímpares é decidível. Para tal mostre que, se a máquina acima arrancar com uma fita da forma $0\overset{1}{1}11...1$ com n 1s, ela devolve $0\overset{7}{1}$ se n for ímpar, e $0\overset{7}{1}1$ se n for par.

Consideremos, como exemplo, abaixo à esquerda e à direita, a actuação da máquina sobre as fitas $0\overset{1}{1}1111$ de cinco 1s e $0\overset{1}{1}11111$ de seis 1s respectivamente.

$0\overset{1}{1}1111$
1R2
$01\overset{2}{1}111$
0R3
$010\overset{3}{1}11$
0R2
$0100\overset{2}{1}1$
0R3
$01000\overset{3}{1}$
0R2
$010000\overset{2}{0}$
0L6
$01000\overset{6}{0}0$
0L6 várias vezes
$0\overset{6}{1}000000$
1O7
$0\overset{7}{1}00000$

$0\overset{1}{1}11111$
1R2
$01\overset{2}{1}1111$
0R3
$010\overset{3}{1}111$
0R2
$0100\overset{2}{1}11$
0R3
$01000\overset{3}{1}1$
0R2
$010000\overset{2}{1}$
0R3
$0100000\overset{3}{0}$
0L4
$010000\overset{4}{0}0$
0L4 várias vezes
$0\overset{4}{1}00000$
1R5
$01\overset{5}{0}00000$
1L6
$0\overset{6}{1}10000$
1O7
$0\overset{7}{1}10000$

Vemos que no início as actividades da máquina são exactamente iguais, sendo que ao substituir 1s por 0s, ela assume alternadamente os estados 2 e 3. Em consequência disto, ao chegar ao primeiro 0 à direita do bloco original de 1s, no caso de um número ímpar de 1s na fita original, lê o 0 em estado 2; mas no caso de um número par de 1s, lê o 0 em estado 3. A partir daqui, vai para a esquerda; mas no `caso ímpar' assume nesta andança o estado 6, e no `caso par' o estado 4. Esta diferença de estados vai permitir no fim fazer com que os cálculos terminem com 1 e 11 respectivamente.

O único livro que conhecemos que apresenta máquinas de Turing sistematicamente por tabelas é "An Introduction to Mathematical Logic" [3], livro de interessante arquitectura, mas infelizmente com inúmeras gralhas com alguma gravidade. Concluímos informando que Turing foi referido na *Gazeta* em pelo menos dois artigos recentes: pela sua importante contribuição na descodificação da máquina criptográfica Enigma da Alemanha-Nazi "Enigma: uma história que devia ser mais bem conhecida" [4], e em "O Problema P≠NP?"[5] por causa da possibilidade de com máquinas de Turing ou as suas alternativas se poder definir o conceito da complexidade computacional.

Esperamos que a importância de equações algébricas e de máquinas de Turing incentive os leitores a resolverem os problemas aqui postos e os restantes problemas do Canto da *Gazeta* número 159. Nós, do Projecto Delfos, sabemos que ambas as coisas são exigíveis a alunos especialmente interessados, portanto, envolvê-los nestas actividades pode enriquecer o ensino. Sabemos também, aliás, que não precisam de muita motivação para apreciarem o núcleo matemático de questões como as aqui abordadas.

Enviem soluções dos problemas aqui referidos, de preferência em papel, para

Projecto Delfos,
Departamento de Matemática da FCTUC,
Apartado 3008,
EC Universidade,
3001-454 Coimbra
e-mail: *delfos@mat.uc.pt*

REFERÊNCIAS

[1] António Pereira Rosa (2009), "Transformações de Gráficos, Substituições e Equações do Terceiro Grau", Gazeta 158, págs. 53-59.

[2] António Pereira Rosa (2009), "A Transformação de Tschirnhaus", Gazeta 159, págs. 49-59.

[3] Jerome Malitz (1979), "An Introduction to Mathematical Logic", UTM, Berlin: Springer.

[4] António Machiavelo (2004), "Enigma: uma história que devia ser mais bem conhecida", Gazeta 147, págs. 14-15.

[5] Paulo Mateus (2009), "O Problema P≠NP?", Gazeta 157, págs. 49-51.