



## Artigo Convidado

por Eduardo Marques de Sá

[Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra]

# Curvas duma bola de bilhar solitária

Como é que se movem um berlinde, um planeta e uma bola de bilhar? Quando o astro se despe de mares e montanhas, as diferenças são poucas, como Newton postulou... O tamanho não interessa! Mas, se a bola escorrega na mesa de pano, as curvas são outras. Jogue bilhar de sofá e saiba das equações que mostram o *como* e o *porquê*.

Uma bola de bilhar pode descrever curvas complicadas sobre a mesa de jogo. O bilharista experiente sabe disso e treina intensamente os pormenores técnicos de controlo dessas curvas: a posição do corpo, dos braços e mãos que produzem a tacada, a inclinação do taco, o ponto de ataque na bola, a força adequada e o modo de a exercer; se a coisa corre mal, se a trajectória não for a pretendida, repete e altera quanto basta. Uma prática e uma arte experimentais de que aqui se mostram alguns fundamentos teóricos.

Face à complexidade do jogo, o objectivo deste artigo é bem modesto: deduzir as equações das curvas descritas por uma bola de bilhar na ausência de choques com tabelas e outras bolas. Para isso será preciso vasculhar um pouco as leis da Mecânica Clássica tal como foram descobertas por Newton nos seus *Principia* (1687), apuradas matematicamente por Euler, nos seus tratados *Mecânica* (1736) e *Teoria do Movimento dos Corpos Rígidos* (1765) e levadas no séc. XIX à forma que hoje conhecemos. Na parte introdutória, já a seguir, não poderiam faltar referências ao sistema planetário pois foi ele a motivação central de Newton e dos que se lhe seguiram.

Se não estiver muito vento, experimente lançar ao ar uma bola – pode ser um berlinde ou uma bola de futebol, de bilhar ou de basquete – e observe dois fenómenos: o seu centro descreve a tradicional trajectória parabólica de ascensão e queda dos graves

e a bola roda segundo um eixo de direcção *fixa* no espaço, eixo esse *fixo* relativamente à própria matéria da bola. Por muitos trejeitos que faça no lançamento, o resultado é garantido, *q.b.*, caso a sua bola não tenha assimetrias muito pronunciadas e as velocidades que lhe imprima não sejam muito elevadas.

De facto, a bola não está sujeita apenas à força da gravidade; ela desloca-se num fluido, o ar, que exerce sobre a sua superfície forças subtis e complexas cujos efeitos os bons jogadores (de ténis, de futebol, de baseball) sabem controlar. A velocidades baixas, tais forças são negligenciáveis, mas um pontapé violento e com efeito numa bola de futebol fá-las intervir de modo decisivo, determinando trajectórias torças do centro da bola e alterações do eixo de rotação. O futebol lunar vai ser muito menos interessante!

A mesma experiência, quando feita com um objecto bem assimétrico – como um pau toscos, um disco, um martelo ou uma bola de rãguebi – que repetidamente se arremesse com força, tem resultados algo diferentes; a trajectória parabólica, ainda vá, mas a rotação tem o seu quê de caótico: varia de aspecto dum lançamento para outro, é difícil discernir *um* eixo de rotação, muitas vezes rodam bamboleando-se... Quanto mais toscos, mais toscamente voam, aparentemente sem regras. Parece, mas não é assim: há leis bem definidas do movimento de qualquer sólido, matematicamente muito interessantes e difíceis, de que vamos falar.

Para medir posições de pontos em movimento, e suas velocidades e acelerações, vai ser preciso um sistema de referência,  $Oxyz$ , ortonormado, com orientação directa, e que possamos considerar “em repouso”. Cada ponto  $P$  é então identificado pelo seu vector posicional  $\vec{OP}$ ; a sua velocidade, denotada  $\vec{v}_p$ , é a derivada de  $\vec{OP}$  (em ordem ao tempo) e a sua aceleração é a derivada de  $\vec{v}_p$ . Note que o “repouso” é um conceito relativo: o nosso referencial pode estar em repouso relativamente à Terra, mas ela roda em torno do seu eixo e orbita o Sol, que por sua vez orbita o centro da Via Láctea, e esta dirige-se sabe-se lá para onde, em direcção a Andrómeda. O que verdadeiramente interessa é podermos supor, para efeitos práticos, que as leis de Newton se aplicam ao nosso referencial.

A notação  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  representa o produto vectorial dos vectores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Recorde-se que a definição é dada de modo a que  $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$ , onde  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  denotam, como habitualmente, os versores dos eixos  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , respectivamente.

Numa abordagem simplificada, podemos definir *sistema material* como agregado dum número finito de pontos materiais,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  com massas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  concebidos como os *átomos* que o constituem. O *baricentro*, ou *centro de massa*, do sistema é o ponto  $G$  dado por  $m\vec{OG} = m_1\vec{OP}_1 + m_2\vec{OP}_2 + \dots + m_n\vec{OP}_n$ , onde  $m$  é a massa total do sistema. A ideia dum sólido ou dum fluido como um contínuo de matéria é uma abstracção matemática à qual aplicaremos, sem complexos, as conclusões a seguir descritas, apesar das dificuldades teóricas que o contínuo sempre levanta.

**A primeira Lei.** Derivando duplamente ambos os membros da equação definidora de  $G$  e aplicando a cada átomo a famosa segunda lei de Newton do movimento dos corpos, obtemos a equação diferencial

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_e$$

onde  $\vec{R}_e$  designa a resultante das forças que, *do exterior*, se exercem sobre o sistema. De acordo com a referida lei newtoniana, a equação diferencial em destaque lê-se assim: *o baricentro move-se como se fosse um ponto material de massa igual à massa total do sistema, actuado pela resultante das forças exteriores que se exercem sobre o sistema*. Este enunciado, a que costuma chamar-se *primeira lei universal da Mecânica*, mostra que o baricentro é um centro dinâmico do sistema, e esta centralidade dinâmica é reforçada por uma segunda

lei explicada mais adiante. Um momento-chave da demonstração acima esboçada é o facto de a resultante da *totalidade* das forças aplicadas em pontos do sistema ser igual à resultante das forças exteriores, e apenas dessas, pois a terceira lei de Newton (a da *acção e reacção*) implica o cancelamento das forças geradas *no interior* do sistema. As forças interiores não contribuem, pois, para a trajectória do baricentro. Para ilustrar, pensemos num veículo que se desloca no espaço sideral, na ausência de forças exteriores, e que em determinado momento explode, por forças internamente geradas. Como a resultante das forças exteriores é sempre nula, a velocidade do baricentro tem derivada sempre nula, pelo que ele se desloca com movimento rectilíneo uniforme; a explosão fragmenta o sistema, os estilhaços e gases da explosão seguem os mais diversos caminhos, mas o baricentro do sistema de todas essas partículas migrantes segue sempre com velocidade constante.

**Rotação dum sólido.** De acordo com Euler, o movimento dum sólido pode decompor-se em dois: um movimento do seu baricentro  $G$ , dito de translação de  $G$ , e uma rotação do sólido em torno de  $G$ . A expressão “rodar em torno de  $G$ ” designa um movimento do sólido em que  $G$  se supõe fixo, melhor dizendo, um movimento observado no referencial  $Gxyz$ , dito *baricêntrico*, que tem origem  $G$  e eixos paralelos aos do nosso referencial “em repouso”; neste novo referencial, que acompanha o sólido no seu movimento, o baricentro está imóvel.

Imagine uma esfera que se move, mantendo-se imóvel o seu centro. Por muito caótico que o movimento seja, vale o seguinte teorema, também de Euler: se, em certo instante, algum ponto da esfera se move, *existem exactamente dois pontos da sua superfície que estão imóveis, e esses pontos são antípodas*; eles determinam o chamado *eixo instantâneo* de rotação da esfera. O teorema permite definir, de modo óbvio, *eixo instantâneo* de rotação de qualquer sólido em torno do seu baricentro.

Uma câmara de filmar que faz um grande plano numa bola de futebol, seguindo-a no seu movimento, ilustra bem o referencial baricêntrico. Em imagens televisivas obtidas por este método, é perceptível o eixo de rotação baricêntrica e as suas variações complexas provocadas pelo atrito do ar.

Vá a um bazar e traga de lá um giroscópio, brinquedo fascinante para os miúdos e para quem

## [Curvas numa bola de bilhar solitária]

gosta destas coisas. Faça-o girar com rotação rápida em torno do seu eixo de revolução; segure-o com uma mão em cada chumaceira (a negro, na Figura 1) e force o eixo de simetria de revolução a rodar como na figura; nesta situação, o eixo de rotação euleriano não coincide com o eixo de revolução, pois este está em movimento!

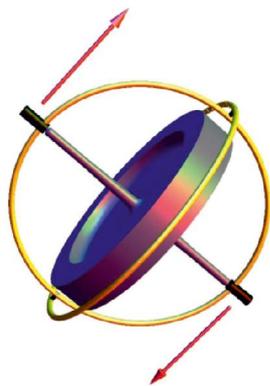


Figura 1

Daqui em diante, chamamos *eixo* dum sólido a qualquer recta que passa pelo baricentro. Admitamos, provisoriamente, que  $G$  está imóvel e que o sólido roda em torno dum eixo  $\varepsilon$ , com rotação uniforme; cada ponto seu tem uma trajectória circular num plano perpendicular a  $\varepsilon$  (como na Figura 2) descrita com uma certa velocidade angular  $\omega$  (medida em radianos por segundo), que é a mesma para todos os pontos do sólido. O vector rotação do sólido, denotado por  $\vec{\omega}$ , define-se assim: tem módulo  $\omega$ , tem a direcção do eixo de rotação e o sentido é o da progressão dum saca-rolhas rodando como roda o sólido. Tudo foi preparado para que a velocidade de  $P$  seja dada por  $\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{GP}$ . Esta fórmula vale, também, para o caso geral em que o movimento de rotação não é uniforme, isto é, quando  $\omega$  varia quer em módulo, quer em direcção e sentido. A decomposição euleriana do movimento do sólido numa translação de  $G$  e uma rotação em torno de  $G$  pode, agora, exprimir-se de modo preciso: a velocidade de cada ponto  $P$  é soma de duas: a de  $G$  e a velocidade de rotação em torno de  $G$ . Em símbolos:  $\vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP}$ .

**A segunda Lei.** Quando um sistema não é sólido, o conceito de rotação não é, em geral, viável; o nosso Sistema Solar mostra isso com muita clareza: cada

astro, dentre Sol e planetas, mesmo não sendo sólido, move-se à sua maneira em torno do seu baricentro doméstico, não havendo uma rotação comum concertada. Esses casos não sólidos suscitaram uma generalização muito eficaz do conceito de rotação. O *momento angular* dum ponto material  $P$  relativamente a um ponto  $O$  é o vector  $\vec{OP} \wedge m_P \vec{v}_P$ . Isto estende-se com naturalidade a qualquer sistema material: o *momento angular dum sistema* relativamente a  $O$  é a soma dos momentos angulares relativos a  $O$  dos pontos que o constituem. Note que o momento angular depende muito do ponto  $O$  de onde se observa o movimento.

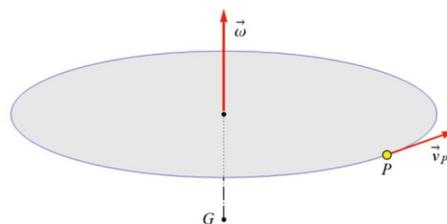


Figura 2

Imagine-se num aeroporto vendo aviões levantar voo. Numa posição bem escolhida está um avião, muito ao longe, parecendo *imóvel a seus olhos*, mas que você sabe que se afasta rapidamente; nesses instantes, o momento angular, relativamente a si, é nulo. De repente, a pequena imagem do avião sobe verticalmente como que arrancada do chão; então, o momento angular é um vector horizontal apontando para a sua direita.

Dada uma força  $\vec{F}_P$  aplicada em  $P$ , a sua *torção a respeito de  $O$*  é, por definição, o vector  $\vec{OP} \wedge \vec{F}_P$ ; para certo sistema, à soma das torções de todas as forças aplicadas nos seus pontos chamamos *torção dessas forças a respeito de  $O$* . Pela segunda equação de Newton é óbvio que, relativamente a  $O$ , a *derivada do momento angular de  $P$  iguala a torção da força aplicada em  $P$* .<sup>1</sup> Somando tudo, como de costume, prova-se a *segunda lei universal da Mecânica: relativamente ao ponto  $O$ , a derivada do momento angular é igual à torção das forças exteriores*. Após mais um esforço, não muito, vem a parte mais interessante da segunda Lei, o reforço anunciado do protagonismo dinâmico do baricentro:

*A derivada do momento angular relativamente ao baricentro é igual à torção das forças exteriores relativamente ao baricentro!*

<sup>1</sup>Na prova, tenha em conta a fórmula de derivação:  $(\dot{u} \wedge \dot{v}) = \dot{u}' \wedge \dot{v}' + \dot{u} \wedge \dot{v}'$

Note o sumiço de cena das forças interiores ao sistema, que não surpreende quem já assistiu ao cancelamento dessas forças no caso da primeira Lei. Mas, agora, é preciso supor algo mais: que a acção dum ponto do sistema sobre outro e a correspondente reacção se exercem segundo a recta que une os ditos pontos. Estas duas leis universais são frequentemente denominadas por *Leis de Euler*, apesar de Newton estar bem presente na primeira e de, na segunda, a formulação usada ser posterior a Euler.

Note que o baricentro é uma espécie de média pesada das posições dos pontos dum sistema. Se numa certa zona restrita do sistema se concentra grande parte da massa total, é caso para conjecturar que o baricentro deve andar nas imediações dessa zona. Como exemplo, podemos perguntar-nos: por onde é que anda o baricentro do Sistema Solar? Sabendo nós, como hoje sabemos, que o Sol tem mais de 99,8% da massa total do Sistema, e que ele mais os quatro gigantes gasosos, Júpiter, Saturno, Urano e Neptuno, têm mais de 99,99% da massa total, para efeitos práticos, o baricentro está “no Sol”. Se desprezarmos a influência gravitacional das estrelas da nossa e das outras galáxias, o baricentro, o Sol, desloca-se em movimento rectilíneo uniforme no espaço sideral, e os planetas lá vão atrás dele, orbitando em seu redor. Em 1543, Nicolau Copérnico propôs o seu sistema heliocêntrico pela *simplicidade geométrica* da descrição dos movimentos planetários. As leis de Newton e Euler deram à centralidade do Sol um estatuto de maior nobreza, ao proclamarem-no como centro dinâmico do nosso Sistema.

O baricentro do Sistema não está no centro do Sol; a distância entre estes dois pontos varia, principalmente, de acordo com as posições dos quatro gigantes gasosos; no seu maior afastamento do centro solar, que ocorre na conjunção dos gigantes, o baricentro fica a cerca de um raio solar da superfície do Sol. Para observadores de outras estrelas, os planetas poderão não ser visíveis, mas o Sol aparenta uma vibração em torno de uma posição intermédia, o nosso baricentro. Foram vibrações deste tipo os primeiros indícios que os terráqueos tiveram (em 1992 e hoje confirmados) da existência de planetas extra-solares, já previstos por Giordano Bruno, que pagou com a vida, e, passado um século, por Newton; a nossa tecnologia não consegue, por ora, olhar uma estrela e medir eventuais

acelerações *angulares* causadas por planetas que a orbitem; o que medimos (por efeito *Doppler*) são as acelerações longitudinais de certas estrelas, as quais adquirem, só por isso, o estatuto de centros de sistemas planetários. Hoje existem imagens infravermelhas de planetas extra-solares, mas a maior parte deles são, ainda, fantasmas.

O Sol desloca-se, tremendo, rodeado pelo seu séquito de planetas, em direcção à constelação Hércules e assim será durante toda a nossa vida e mais umas dezenas de milhares de anos. Porém, as forças gravitacionais do centro da Via Láctea implicam um lento encurvamento desta trajectória; o nosso ápex arredar-se-á de Hércules, e levaremos uns 230 milhões de anos a dar a ‘volta inteira’ à Galáxia...

Estes exemplos e os que se seguem ilustram a grande latitude de aplicação das leis da Mecânica Clássica: elas valem na escala do muito pequeno, para sistemas de grãos de areia, berlindes e bolas de bilhar, e na escala do muito grande, para sistemas de planetas e estrelas, de galáxias e enxames de galáxias. Uma regra de ouro a ter em conta é a de que as velocidades envolvidas sejam bem menores do que a velocidade da luz...

**Movimento dum sólido.** Vamos considerar um corpo sólido e os seus *eixos*, isto é, as rectas que passam pelo baricentro. Numa rotação de eixo  $\varepsilon$ , o momento angular (relativamente a G) é uma função da rotação  $\vec{\omega}$ , de estrutura difícil de descrever. Os casos mais simples de tratar são aqueles em que  $\varepsilon$  é um *eixo de simetria* do sólido<sup>2</sup>, como na Figura 3; nesses casos, o momento angular está alinhado com o eixo, ou seja, o momento é da forma  $I_\varepsilon \vec{\omega}$ , onde  $I_\varepsilon$  é uma constante positiva, chamada *inércia* do sólido relativamente ao eixo em causa.<sup>3</sup>

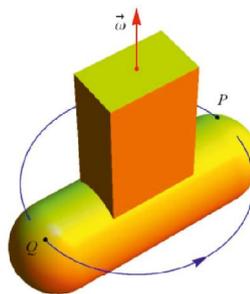


Figura 3

<sup>2</sup> Isto significa que, para cada ponto  $P$  do sistema, o ponto  $Q$  oposto a  $P$  a respeito do eixo  $\varepsilon$  ( $PQ$  ortogonal a  $\varepsilon$ ) também pertence ao sistema, e  $P$  e  $Q$  têm a mesma massa. Trata-se, aqui, de simetria *material* e não apenas geométrica. Nesta acepção, uma esfera não homogénea pode bem não ter eixo de simetria nenhum.

<sup>3</sup> Basta provar para subsistemas de dois átomos de massas iguais, em posições axialmente opostas, como  $P$  e  $Q$  na figura. Depois, tenha-se em conta que um sistema material simétrico é reunião de pares de pontos como  $P$  e  $Q$ .

Defina *corpo esférico* como um sólido limitado cujos eixos são todos de simetria e divirta-se a provar que um tal corpo não é mais do que uma esfera cuja massa específica depende apenas da distância ao centro. Intuitivamente, trata-se numa união de cascas esféricas concêntricas (como uma cebola), em que cada casca é homogénea, podendo cascas distintas ter 'densidades' distintas. Assim, a segunda Lei é particularmente simples para um corpo esférico:

$$\frac{d}{dt}(I\dot{\omega}) = \vec{\tau}_e$$

onde  $\vec{\tau}_e$  denota a torção das forças exteriores relativamente a  $G$ , e  $I$  é a inércia comum a todos os eixos. Isto vale para berlindes e bolas de futebol, de basquete, de bilhar e outras.

Já podemos dar a explicação matemática do comportamento da bola lançada ao ar no início do artigo. O movimento parabólico do baricentro é consequência óbvia da primeira Lei e da uniformidade implicitamente assumida do campo gravítico. Para qualquer sólido, é nula a torção relativamente a  $G$  das forças gravíticas, dada a uniformidade do campo. Portanto  $I\dot{\omega}$  tem derivada nula, e  $\dot{\omega}$  é constante!

Imaginemos a Terra como se fosse um corpo esférico no espaço sideral. As forças exteriores devem-se a campos gravíticos, principalmente os do Sol e da Lua. Também neste caso a simetria esférica implica o anulamento da torção das forças exteriores relativamente ao centro da Terra. A segunda Lei determina, pois, que este esférico ideal tem uma rotação uniforme em torno dum eixo fixo. A realidade não anda muito longe disto, mas a Terra não é bem um corpo esférico, sendo o achatamento nas zonas polares o desvio de esfericidade mais notório. Esta assimetria produz, relativamente ao centro da Terra, uma torção não nula das forças de atracção que sobre nós se exercem, suficiente para provocar um movimento muito lento, mas sistemático, do Eixo do Mundo.<sup>4</sup> Esse movimento, dito de *precessão do eixo*, ou *dos equinócios*, foi descoberto empiricamente por Hiparco de Rodas (séc. II a.C.), considerado por muitos o maior astrónomo da Antiguidade; após Newton e Euler, foi possível explicá-lo à luz das leis da Mecânica.

<sup>4</sup>Hoje, a Estrela Polar indica-nos o norte, por estar, mais coisa menos coisa, na direcção do eixo de rotação da Terra e, por isso, parecer quase imóvel no movimento diurno da Esfera Celeste. Com o deslocamento do nosso eixo, daqui a uma dúzia de milénios, a Polar estará muito longe do Pólo Norte celeste e muitos não perceberão porque é que lhe deram o nome que talvez ainda tenha. Faltará, então, outra dúzia de milénios para voltar à sua posição de privilégio.

Use o giroscópio que comprou por ocasião da Figura 1, e repita a manobra aí recomendada: segure-o com uma mão em cada chumaceira negra, *com delicadeza*, e procure rodar-lhe o eixo no plano da figura. Enquanto mantém o eixo em repouso, o momento angular mantém-se alinhado com o eixo,  $\vec{\omega}$  mantém derivada nula e tudo permanece em paz; mas, mal começa a sua tentativa de rodar o eixo, o giroscópio reage como se tivesse vontade própria, teimando em não lhe obedecer: mostra querer rodar o eixo num plano perpendicular àquele que você pretende! A justificação está na segunda Lei de Euler: o binário que você exerce tem torção  $\vec{\tau}_e$  perpendicular ao plano da figura e, sendo a torção a derivada do momento, Euler manda que o momento tenda a alinhar-se com a normal ao plano do binário. Isto é apenas o prelúdio numa análise rigorosa que deixo a seu cargo. O mesmo argumento serve para o irmão pobre do giroscópio, um pião rodando velozmente com o bico assente no solo: o binário é o exercido pelo peso e pela correspondente reacção do solo, e o pião responde fazendo rodar o seu eixo de simetria em torno dum eixo vertical; chama-se a isto *precessão do eixo* e o aspecto geral é a rotação bamboleante típica do pião.

A Terra é um grande pião e um grande giroscópio... O movimento de precessão do nosso eixo é tal e qual o de precessão de qualquer dos dois brinquedos. E a causa é análoga: a Terra é uma esfera bojudia e o Sol (em particular) atrai mais fortemente o bojo equatorial mais próximo dele do que o mais distante, o que origina uma torção não nula causadora da precessão terrestre.

A elevada dificuldade da teoria do movimento dos sólidos permite apenas, neste texto, breves notas ilustrativas. As formulações recentes, gizadas no séc. XIX, entroncam na teoria das quádras e na dos valores e vectores próprios de matrizes simétricas reais.

De um modo geral, a cada sólido está associado um elipsóide homogéneo, solidário com o sólido, com o mesmo baricentro e com a mesma massa, tal que o *comportamento dinâmico* do sólido é exactamente o mesmo que o desse elipsóide. Quer dizer, quando actuado por um certo sistema de forças exteriores, o sólido move-se tal e qual como se moveria o elipsóide sujeito às mesmas forças. Podemos, pois, em vez de sólidos, reduzir o estudo aos elipsóides (homogéneos). Em particular, as inércias  $I_i$  são, para

cada eixo, as mesmas para o sólido e para o seu elipsóide.

Os sólidos podem, assim, classificar-se de acordo com os correspondentes elipsóides; aqueles cujo elipsóide é esférico costumam designar-se por *peões esféricos*. Exemplos de peões esféricos são os sólidos esféricos acima definidos e os sólidos platónicos homogéneos! Portanto, se atirar um cubo perfeito ao ar (basta um cubo de Rubik), ele rodará como uma bola de bilhar, em torno dum eixo fixo; com rotações rápidas, a fixidez do eixo é notória. A Figura 4(a) simula um cubo em rotação rápida; trata-se da sobreposição de 20 imagens do cubo rodando em torno dum seu diâmetro; já se vislumbra a envolvente de todas as imagens possíveis constituída por dois cones e um hiperbolóide de revolução. A Figura 4(b) é sobreposição de 200 imagens do dito cubo rodando em torno dum eixo genérico; a envolvente é, também aqui, união de hiperbolóides. O que interessa observar a olho nu é que, no sistema baricêntrico, as cristas circulares da envolvente não variam com o tempo em cada lançamento do cubo ao ar, o que mostra tratar-se dum peão esférico.

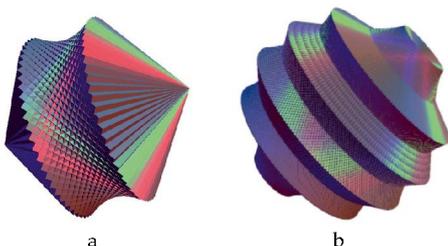


Figura 4

Um eixo diz-se de *rotação livre* se, lançado o sólido no espaço, sem forças exteriores e com rotação inicial em torno desse eixo, a rotação se mantém, uniforme, em torno desse eixo. Um corolário da teoria euleriana é que um eixo é de rotação livre se e só se uma rotação em torno desse eixo produz um momento angular alinhado com o eixo. Mais ainda, os eixos de rotação livre são precisamente os eixos de simetria do elipsóide associado.

Experimente lançar no espaço uma bola de rãguebi, ou um disco de atletismo, procurando gerar uma rotação muito rápida em torno do seu eixo de revolução. É difícil conseguir uma rotação inicial em torno desse eixo mas, caso consiga, o objecto segue com rotação uniforme em torno dele. Nas suas tentativas, o que geralmente observa é um movimento “bamboleante”.

A mesma experiência feita com um *frisbee* de praia tem resultados melhores para a nossa auto-estima porque, no disco de praia, com peso e configuração que amplificam o efeito aerodinâmico, o movimento “bamboleante” tende a desaparecer em pouco tempo. Não é raro que um lançamento muito fraco acabe por se transformar, na parte final da trajetória, num voo magnífico.

Em 1834, Louis Poincot deu uma descrição geométrica completa de todas as possibilidades de movimentos de sólidos supondo nula a torção das forças exteriores. A descrição dos *movimentos de Poincot* (como os dos asteróides à solta) é muito interessante mas, aqui, só há espaço para o caso em que os sólidos cujos elipsóides são de revolução, como são os casos da bola de rãguebi e do disco de atletismo. Matematicamente, movimento *bamboleante* é o de um sólido que roda uniformemente em torno do eixo  $r$  de revolução do seu elipsóide, enquanto este eixo, por sua vez, roda em torno de outro eixo, o eixo de precessão. Na Figura 5,  $\vec{\omega}_r$  denota a rotação em torno de  $r$  e  $\vec{\omega}_p$  é a precessão. Os movimentos de Poincot são todos deste tipo, e Poincot deu uma relação precisa entre os valores das duas rotações  $\vec{\omega}_r$  e  $\vec{\omega}_p$ . Note-se que esta precessão ocorre espontaneamente nos movimentos de sólidos sob torção nula; a precessão do pião e a do eixo da Terra acima descritas são forçadas por acções exteriores.

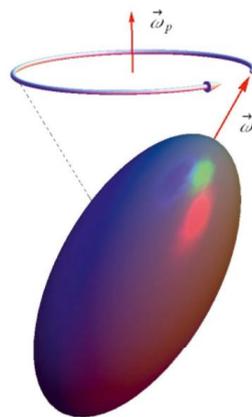


Figura 5



Figura 6

No filme “2001 Odisseia no Espaço”, Kubrick e Clarke colocaram a estação espacial em rotação em torno do seu eixo de simetria (Figura 6). O dito eixo é de rotação permanente e permite gerar, por efeito centrífugo, uma gravidade artificial indispensável ao equilíbrio fisiológico da tripulação... Reveja a notável cena de *jogging!* Imagine que uma pequena perturbação exterior, momentânea, desequilibra a nave, pondo-a em movimento de Poinset com precessão não nula; o desagradável bamboleio tem de ser corrigido de emergência... Nada que Hal não possa resolver de imediato! Mas se fosse o leitor a ter de intervir, como é que estabilizaria a nave?

**Movimento duma bola de bilhar.** A bola de bilhar que vai estar em jogo é uma esfera homogênea, de massa  $m$  e raio  $r$ . Conforme vimos, as leis da mecânica dão-nos, neste caso, as equações

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{\mathfrak{R}}_e \quad \text{e} \quad I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\mathfrak{T}}_e$$

onde  $\vec{\mathfrak{R}}_e$  e  $\vec{\mathfrak{T}}_e$  denotam, respectivamente, a resultante das forças exteriores e a torção dessas forças a respeito do baricentro  $G$ , e  $I$  é a inércia da bola relativamente a qualquer dos seus eixos. Esta inércia não é difícil de calcular; saltamos por cima dessa tarefa de rotina e indicamos o seu valor para o caso da bola de bilhar:

$$I = \frac{2}{5} mr^2.$$

A teoria das equações diferenciais diz-nos que, conhecidos os segundos membros destas equações e conhecidos os valores iniciais de  $\vec{v}_c$  e  $\vec{\omega}$ , denotados por  $\vec{V}_0$  e  $\vec{\Omega}_0$ , então existem funções do tempo,  $\vec{v}_c(t)$  e  $\vec{\omega}(t)$ , unicamente determinadas, que satisfazem as equações e as condições iniciais:  $\vec{v}_c(0) = \vec{V}_0$  e  $\vec{\omega}(0) = \vec{\Omega}_0$ . Por outro lado, uma vez determinada a função velocidade do centro da bola e sabida a sua posição inicial, a trajectória da bola, ou, melhor, do seu centro pode calcular-se por simples primitivação. As equações acima usar-se-ão em dois casos: na

<sup>5</sup>Do francês *masser*. O maço (maça, ou maçaneta) foi o antepassado do taco, de uso corrente até ao séc. XIX; quando encostada à tabela, a bola tinha de ser maçada de cima para baixo, com uma maçaneta de cauda longa e fina. Com o correr do tempo, a cauda da maça passou a utilizar-se com cada vez mais frequência para percutir a bola, dando origem ao taco moderno. O nome “cauda” para taco ainda é usado em francês, *queue*, do qual deriva o inglês *cue*.

determinação do resultado duma tacada e no cálculo da trajectória subsequente.

**Tacada.** Para um matemático bilharista, *tacada* é a acção duma força  $\vec{T}$  sobre um ponto da superfície da bola de bilhar, chamado ponto de *percussão* ou de *ataque* (denotado por  $A$ , sempre a amarelo nas figuras). De acordo com as regras do jogo, a bola está em repouso no início da tacada e a força  $\vec{T}$  exerce-se durante um tempo  $\Delta t$  muito curto (alguns milésimos de segundo). Para já, admitimos que a bola se encontra isolada no espaço, sem outras forças externas para além da tacada. Supomos, para simplificar a vida, que  $\vec{T}$  é constante durante o tempo de acção do taco; nestas condições, as equações de Euler dão-nos os seguintes valores da velocidade do baricentro e da rotação no instante  $\Delta t$ :

$$\vec{V}_0 = \frac{\Delta t}{m} \cdot \vec{T} \quad \text{e} \quad \vec{\Omega}_0 = \frac{\Delta t}{I} \cdot \vec{GA} \wedge \vec{T}.$$

A Figura 7 dá uma ideia da situação: se o eixo  $AB$  do taco passa pelo centro da bola, esta sai da tacada sem rotação; caso contrário, a recta  $AB$  e o centro da bola determinam um plano, o do equador vermelho da figura, chamado *equador da tacada*. A rotação à saída da tacada é perpendicular a esse plano.

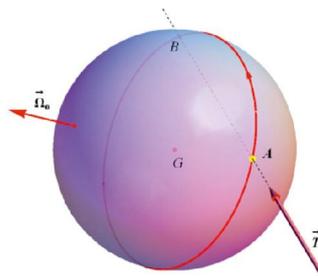


Figura 7

Com a bola assente na mesa de jogo,  $\vec{T}$  decompõe-se em duas forças,  $\vec{T}_H$  e  $\vec{T}_N$ , uma horizontal e a outra normal à mesa, ambas aplicadas no ponto de ataque, como na figura 8. A mesa reage compensando o peso  $\vec{P}$  da bola e a componente  $\vec{T}_N$ . As forças exteriores têm resultante  $\vec{T}_H$  e a sua torção a respeito de  $G$  é a mesma que anteriormente. Assim, as características do movimento da bola à saída da tacada são

$$\vec{V}_0 = \frac{\Delta t}{m} \cdot \vec{T}_H \quad \text{e} \quad \vec{\Omega}_0 = \frac{\Delta t}{I} \cdot \vec{GA} \wedge \vec{T}.$$

A Figura 8 ilustra a técnica conhecida por *picar a bola*, utilizada sempre que se pretendem regimes elevados de rotação para baixos valores da velocidade  $V_0$  do baricentro. Ao ângulo  $\alpha$  chamaremos *alça do taco*, sendo claro que quanto maior ela for, maior será a razão  $\Omega_0/V_0$ .

Veremos mais adiante como se comporta a bola depois de executada uma tacada em *massé*,<sup>5</sup> que é o nome da gíria bilharista para o caso das tacadas a pique, com alça próxima dos 90°. O leitor atento objectará que as fórmulas dadas para  $\vec{V}_0$  e  $\vec{\Omega}_0$  são apenas uma primeira aproximação; em particular, alças elevadas originam grandes compressões ( $\vec{T}_N$ ) da bola sobre a mesa e fortes obstáculos à rotação da bola no intervalo de tempo  $\Delta t$ . Adoptei as ditas fórmulas para facilitar a vida ao leitor, e a mim próprio!

Note que existem pares  $(\vec{V}_0, \vec{\Omega}_0)$  que não podem produzir-se com uma tacada. Deixo ao leitor a determinação desses pares não admissíveis. Vamos estudar a trajectória da bola com valores iniciais  $(\vec{V}_0, \vec{\Omega}_0)$  quaisquer, mesmo os não produzíveis por uma tacada, pois, para além das tacadas, há outros modos de obter velocidades e rotações, nomeadamente através de choques.

Após uma tacada, as únicas forças a considerar são as de atrito do pano, pois o peso da bola é compensado pela reacção da mesa, e as duas, conjuntamente, têm resultante e torção nulas.

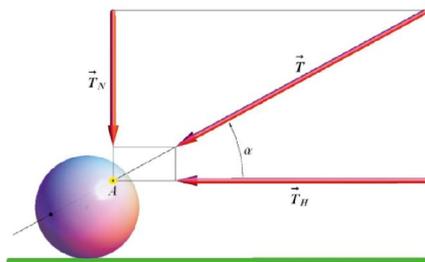


Figura 8

**Travagem exponencial.** Quando as superfícies de dois materiais se tocam e se movem uma sobre a outra, surgem forças que se opõem a esse movimento. Elas dependem de tantos factores e tão complexos (acções electromagnéticas e de coesão molecular, o granulado das superfícies e as interacções físicas e químicas das

duas substâncias) que as forças de atrito não podem extrair-se de princípios gerais. É preciso, em cada caso, escolher um modelo de atrito à medida das circunstâncias. No bilhar vamos adoptar o modelo *linear de atrito de escorregamento*. Porquê? Porque as previsões que o modelo implica por via lógica estão razoavelmente de acordo com o que a realidade mostra.<sup>6</sup> Devo confessar outra razão, menos nobre, para tal escolha: os modelos não lineares são tremendamente difíceis de tratar! Admitamos que uma caixa de massa  $m$  é lançada sobre uma mesa plana horizontal, com uma certa velocidade inicial  $\vec{V}_0$ , como na Figura 9. Postula-se que o escorregamento da caixa sobre a mesa origina, em cada instante, uma força de atrito proporcional e oposta à velocidade  $\vec{v}$  da caixa (a velocidade *do baricentro*, claro); a força de atrito  $\vec{f}$  tem, pois, uma expressão do tipo  $\vec{f} = -\mu\vec{v}$ , onde  $\mu$  é um número positivo, o *coeficiente de atrito*. O movimento de travagem da caixa é regido pela primeira Lei,  $m \, d\vec{v}/dt = -\mu\vec{v}$ , a qual implica que o movimento se faz numa trajectória rectilínea e que o módulo  $v$  da velocidade verifica

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{m} v.$$

Há apenas uma função  $v=v(t)$  que satisfaz esta condição e que toma o valor  $V_0$  no instante  $t=0$ , nomeadamente

$$v = e^{-\mu t/m} V_0.$$

Portanto, a velocidade da caixa diminui exponencialmente com o tempo e tende para zero, mas nunca se anula! Esta *travagem sem paragem* é uma característica pouco realista do modelo linear de atrito, mas há que conviver com ela por mais umas páginas.<sup>7</sup>



Figura 9

<sup>6</sup>Refira-se aqui o modelo de atrito aerodinâmico proporcional ao quadrado da velocidade, um dos dois propostos por Newton. O modelo popularizou-se e terá criado a crença na impossibilidade do voo de máquinas feitas pelo homem e gerado algum atraso na história da aviação. Foi abandonado por não condizer com a realidade, o modelo linear ganhou acolhimento e a história acabou bem.

<sup>7</sup>Um remédio para este desacerto é o abandono do modelo linear em curso. Como isso deita fora as suas virtudes, prefiro manter o modelo e adoptar um critério de paragem muito popular: a caixa declara-se como “parada” quando a velocidade é inferior a um certo valor ‘pequeno’ prescrito.

**As curvas do bilhar.** Na bola de bilhar, a força de atrito exerce-se no ponto  $C$ , o ponto da bola em contacto com a mesa (cf. Figuras 10 e 11). Portanto, a velocidade de  $C$ , que Euler nos diz ser  $\vec{v}_c = \vec{v}_o + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ , onde  $\vec{r}$  denota  $\vec{GC}$ , é que determina o atrito. Repare-se que  $\vec{r}$  é um vector constante. Temos então

$$\vec{f} = -\mu(\vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{r}).$$

Posto isto, o problema a resolver é o da determinação de duas funções vectoriais do tempo,  $\vec{v}_c = \vec{v}_c(t)$  e  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ , que satisfazem as condições

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}_c}{dt} &= -\mu(\vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) & I \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= -\mu r \wedge (\vec{v}_c + \vec{\omega} \wedge \vec{r}) \\ \vec{v}_c(0) &= \vec{V}_o & \vec{\omega}(0) &= \vec{\Omega}_o. \end{aligned}$$

onde  $I = \frac{2}{5}mr^2$  como se indicou. Às duas primeiras condições podemos chamar *equações do bilhar*; as duas últimas são as indispensáveis *condições iniciais*. O problema é simples de resolver analiticamente porque, por detrás da notação vectorial jaz escondido um sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, ao alcance dos alunos dum segundo ano de cálculo. No entanto, a seguinte abordagem geométrica é ainda mais simples. A força de atrito  $f$  varia com o tempo e a sua derivada é fácil de calcular a partir da sua expressão acima; combinando com as equações do bilhar, obtemos a equação

$$\frac{df}{dt} = -\frac{7\mu}{2m} f$$

que é tal e qual a de travagem exponencial estudada antes, com solução pronta a servir:

$$\vec{f}(t) = e^{-ct} \vec{f}(0),$$

onde  $c = 7\mu/2m$  e  $\vec{f}(0) = -\mu(\vec{V}_o + \vec{\Omega}_o \wedge \vec{r})$ . Conclusão: a intensidade da força de atrito tende exponencialmente para 0, mantendo sempre a direcção e o sentido do seu valor inicial  $\vec{f}(0)$ . Uma vez determinado o valor explícito de  $\vec{f}(t)$ , a solução formal obtém-se sem dificuldades.

**Trajectórias.** Está, pois, determinada explicitamente a evolução da força de atrito ao longo do tempo. Para calcular a aceleração de  $G$ , basta dividir  $\vec{f}$  por  $m$ . Portanto, a velocidade do baricentro é a função que tem como derivada  $\vec{f}/m$ , e tem como valor inicial  $\vec{V}_o$ . Se  $\vec{V}_o$  e  $\vec{\Omega}_o \wedge \vec{r}$  são paralelos,  $\vec{V}_o$  e  $\vec{f}$  também são paralelos e a nossa vida fica bem simples,

pois o baricentro tem um movimento rectilíneo. Ora, no caso geral, o baricentro tem trajectórias curvilíneas cuja determinação é melhor que passe pela selecção dum referencial adequado na mesa de jogo. Escolhemos um sistema cartesiano com origem no centro da bola e versores  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , em que  $\hat{e}_1$  é o versor de  $\vec{V}_o$ ,  $\hat{e}_3$  é o versor da vertical ascendente e  $\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_1$ . Aos versores  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  associamos as variáveis  $x_1, x_2, x_3$ . As trajectórias do baricentro serão dadas por equações paramétricas, do género

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ x_2 = \varphi_2(t) \end{cases}$$

onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são funções a determinar. Note-se que a velocidade do baricentro é, em notação cartesiana  $\vec{v}_c = (x'_1, x'_2, x'_3)$ . Portanto, as equações do bilhar envolvem as coordenadas  $x_1, x_2, x_3$  e as suas derivadas até à segunda ordem; a sua resolução, por qualquer método, conduz às coordenadas paramétricas das trajectórias: fixados os valores das constantes físicas do jogo,  $m, r$  e  $\mu$ , cada sistema de condições iniciais (posição, velocidade e rotação) produz uma curva única.

As expressões de  $\varphi_1(t)$  e  $\varphi_2(t)$  até nem são muito complicadas, só que escrevê-las com este processador de texto seria como voar no parafuso de Leonardo... Em vez de insistir nas fórmulas, que utilizei na execução dos desenhos abaixo, prefiro continuar a discussão no contexto geométrico, com maior apelo intuitivo e com algumas ideias e teoremas matemáticos que talvez interessem à *afición* bilharista.

**Rotações elementares.** Recorde-se como, para cada par inicial  $(\vec{V}_o, \vec{\Omega}_o)$ , se instituiu um sistema cartesiano ortonormado  $0x_1x_2x_3$ , fixado na mesa de jogo, com origem coincidente com  $G$  no instante  $t=0$ .

As Figuras 10 e 11 representam a bola a ser percutida pelo taco, mostrando o que se vê do lado de quem joga: o centro da bola está sobre a folha de papel e a bola vai mover-se para o lado de lá da folha; a velocidade  $\vec{V}_o$  e o seu versor  $\hat{e}_1$  são perpendiculares à folha, pelo que o mesmo acontece com o plano da mesa (a traço grosso verde); o versor  $\hat{e}_3$  é vertical e aponta para cima e  $\hat{e}_2$  aponta para a esquerda.

De acordo com isto, decomposmos a rotação inicial numa soma de três vectores, chamados *rotações, ou efeitos elementares*