

Quádricas: Manipulação e Visualização

Antonio Ruiz Lozano*

Projecto Matemática em Acção (CMAF - UL)

Introdução

É patente, nos vários níveis de ensino da Geometria, a dificuldade em “ver” no espaço. Visualizar superfícies (resultantes de cortes, obtidas por rotação), imaginar um sólido a partir de uma planificação e executar uma planificação de um dado sólido são disso alguns exemplos.

Nos nossos dias as novas tecnologias oferecem ferramentas cada vez mais sofisticadas para melhorar a “visão matemática”, que nos chegam em pacotes de uso mais ou menos complicado, mas que se têm imposto pela sua capacidade em estimular professores e alunos. Ocorre perguntar: Como é que se fazia antigamente? Será que a dificuldade em “ver” não existia?

Em 1859 foi criada na Escola Politécnica a cadeira de Geometria Descritiva. No ano lectivo 1860/61 o programa desta cadeira incluía um estudo desenvolvido de superfícies (de revolução, empenadas do segundo grau tais como parabolóides hiperbólicos e hiperbolóides de um ramo) e problemas relacionados (geratrizes, planos tangentes, intersecções). O lente Luiz Porfírio da Mota Pegado, que regeu a cadeira até 1903, terá então encomendado em 1861 uma colecção de cerca de vinte modelos representativos de superfícies regradas e suas intersecções. Essa colecção, fazendo parte do património do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, foi recentemente depositada no Museu de Ciência da Universidade de Lisboa. Na base de alguns destes

modelos encontra-se ainda a etiqueta original do construtor, Fabre de Lagrange, que tinha em meados do século XIX oficina em Paris.

O presente artigo¹ resulta de um trabalho executado no âmbito do Projecto III-472 intitulado “Geometria: manipular e visualizar” proposto ao Programa Ciência Viva pelo Colégio São João de Brito em colaboração com o Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências² de Lisboa. Baseia-se em três modelos, réplicas adaptadas de três modelos da colecção. Apresenta a tradução matemática da manipulação dos modelos e a visualização das superfícies por eles geradas (cilindro, cone, hiperbolóide, parabolóide hiperbólico) com o programa “Mathematica”. As réplicas executadas e o respectivo estudo matemático estiveram patentes no IV Forum Ciência Viva de Maio último.

Do estudo feito podemos concluir que os modelos do século XIX têm algumas vantagens sobre a tecnologia do limiar do século XXI. De facto não nos podemos esquecer de que a imagem no écran de um computador é uma representação bidimensional de objectos tridimensionais, enquanto que ao manipular o modelo de forma a gerar uma certa superfície, é essa superfície que se está a ver.

* Docente do Grupo de Matemática do Colégio São João de Brito, Lisboa.

¹ Visite a página http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accas/superficies_regradas

² O autor agradece a colaboração inestimável de Suzana Metello de Nápoles e as sugestões de Margarida Mendes Lopes e António Bivar. Agradece também os dados fornecidos por Vasco Rivotti relativos sobre a colecção de modelos e a disponibilidade do Museu de Ciência.

Descrição da réplica 1 e a sua manipulação

O modelo 1 A é constituído por dois círculos paralelos com o mesmo raio que sustentam uma rede de fios, com pesos nas extremidades, que simulam um cilindro. O círculo superior pode rodar de um ângulo compreendido entre $-\pi$ e π e deslocar-se longitudinalmente. Quando rodamos o círculo superior a rede de fios deixa de simular um cilindro. No entanto a superfície que descreve é gerada pelas rectas simuladas pelos fios, sendo portanto regrada. O modelo 1 B é análogo mas o círculo superior tem raio menor e a rede de fios simula um tronco de cone.



Réplica 1

Modelação e matematização

Pretendemos estudar o que acontece quando manipulamos os modelos. Para isso vamos expressar matematicamente os objectos que o formam e a acção de rodar que realizamos para obter diferentes superfícies.

As figuras seguintes ilustram os referenciais escolhidos para caracterizar parametricamente as superfícies simuladas pelos fios das réplicas.

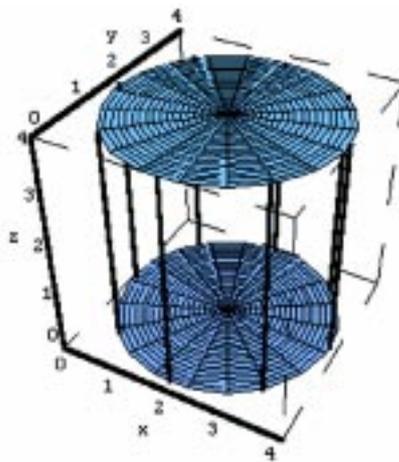


fig 1

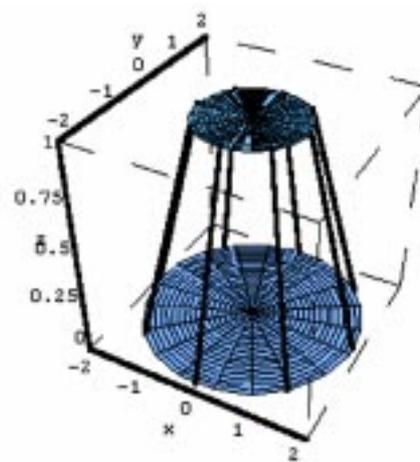


fig.2

A rede

Cada um dos fios une um ponto da circunferência superior com um outro da circunferência inferior. Como estão esticados por pesos, podemos considerar que são segmentos de recta. Apesar de nos modelos os fios serem em número finito (fig. 1 e fig. 2), para o estudo matemático vamos considerar que há infinitos segmentos, um para cada $t \in [0, 2\pi]$.

A rede simulada pelos fios (fig.1) no modelo 1 A corresponde à parte de um cilindro definido pelas equações paramétricas:

$$(x, y, z) = (2 + 2\text{sen } t, 2 + 2\text{cos } t, u), 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 4$$

No modelo 1 B a rede simulada pelos fios (fig. 2) corresponde à parte de um cone definido pelas equações paramétricas:

$$(x, y, z) = (2\text{sen } t - u \text{sen } t, 2\text{cos } t - u \text{cos } t, u), 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq u \leq 1$$

Rodar o círculo superior móvel

O que acontece quando nos modelos construídos fazemos rodar o círculo superior móvel?

Ao rodarmos o círculo superior os extremos dos fios ligados a ele também rodam. Os extremos do círculo fixo permanecem na mesma posição. Se o círculo roda de α radianos, cada um dos extremos dos fios nesse círculo roda também de α radianos. Permanecendo os fios esticados, a rede simula diferentes superfícies regradas.

No modelo 1 A os extremos dos segmentos para $\alpha \in [-\pi, \pi]$ e $t \in [0, 2\pi]$ estão definidos por:

$$(x, y, z) = (2 + 2\text{sen } t, 2 + 2\text{cos } t, 0) + k(2\text{sen}(t + \alpha) - 2\text{sen } t, 2\text{cos}(t + \alpha) - 2\text{cos } t, 4), 0 \leq k \leq 1$$

E no modelo 1 B estes segmentos para $\alpha \in [-\pi, \pi]$ e $t \in [0, 2\pi]$ estão definidos por:

$$(x, y, z) = (2\text{sen } t, 2\text{cos } t, 0) + k(\text{sen}(t + \alpha) - 2\text{sen } t, \text{cos}(t + \alpha) - 2\text{cos } t, 1), 0 \leq k \leq 1$$

Nas figuras seguintes ilustra-se o que acontece para vários valores de α :

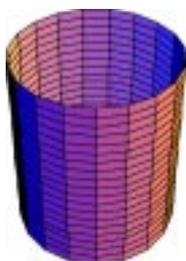


fig 3: Modelo 1 A
Posição inicial ($\alpha = 0$)

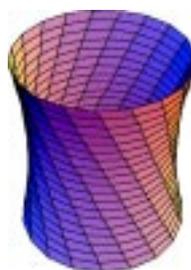


fig 4: Modelo 1 A
($\alpha = \pi/4$)

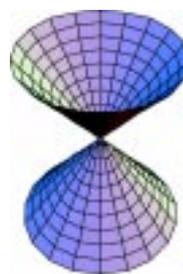


fig 5: Modelo 1 A
($\alpha = \pi$)

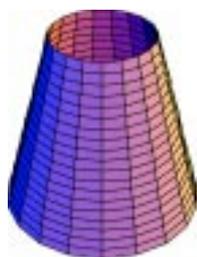


fig 6: Modelo 1 B
Posição inicial ($\alpha = 0$)

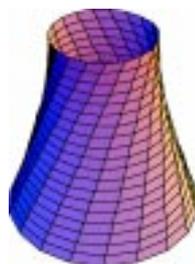


fig 7: Modelo 1 B
($\alpha = \pi/2$)

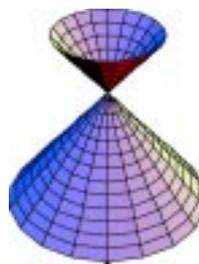


fig 8: Modelo 1 B
($\alpha = \pi$)

Equações paramétricas das superfícies geradas

Quando se roda o círculo móvel de α radianos o modelo 1 A simula uma parte de uma superfície cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 2 + 2\sin t + 2k \sin(t + \alpha) - 2k \sin t \\ y = 2 + 2\cos t + 2k \cos(t + \alpha) - 2k \cos t \\ z = 4k \end{cases} \quad 0 \leq k \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{para } \alpha \in [-\pi, \pi]$$

Fazendo a mudança de variáveis $X = \frac{x-2}{2}$, $Y = \frac{y-2}{2}$ e $Z = \frac{z}{2}$ podemos concluir que se trata de uma quádrlica definida pela equação:

$$2X^2 + 2Y^2 - (1 - \cos \alpha)Z^2 + 2(1 - \cos \alpha)Z - 2 = 0$$

Analogamente³, as equações paramétricas da superfície simulada pelo modelo 1 B, quando se roda o círculo móvel de α radianos, são:

$$\begin{cases} x = 2\sin t + k \sin(t + \alpha) - 2k \sin t \\ y = 2\cos t + k \cos(t + \alpha) - 2k \cos t \\ z = k \end{cases} \quad 0 \leq k \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{para } \alpha \in [-\pi, \pi]$$

e podemos concluir que se trata de uma quádrlica definida pela equação:

$$x^2 + y^2 - (5 - 4\cos \alpha)z^2 + 4(2 - \cos \alpha)z - 4 = 0$$

Estudo da quádrlica $2X^2 + 2Y^2 - (1 - \cos \alpha)Z^2 + 2(1 - \cos \alpha)Z - 2 = 0$

Tendo em conta a paridade do cosseno, basta estudar a quádrlica para $\alpha \in [0, \pi]$

A matriz correspondente a esta quádrlica é:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 - \cos \alpha \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 - \cos \alpha & 0 & 0 & -1 + \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Os invariantes métricos são para qualquer $\alpha \in [0, \pi]$:

$$* |A| = 4(1 - \cos^2 \alpha),$$

$$* A_{00} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \cos \alpha \end{vmatrix} = -4 + 4 \cos \alpha,$$

$$* \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 + \cos \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 + \cos \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cos \alpha$$

$$* a_{11} + a_{22} + a_{33} = 3 + \cos \alpha > 0$$

³ Não é necessário neste caso mudar as variáveis tendo em conta o referencial escolhido.

Na tabela seguinte apresenta-se a classificação das superfícies em função do valor de α . Excepto no caso $\alpha = 0$, é preciso ter em conta que o valor absoluto da diferença entre o número de variações de sinal e o número de permanências de sinal da sucessão A_{00} , $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$, $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ e 1 é igual a 1.

	$ A $	A_{00}	$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$	$a_{11} + a_{22} + a_{33}$	
α	$4(1 - \cos^2 \alpha)$	$-4 + 4 \cos \alpha$	$4 \cos \alpha$	$3 + \cos \alpha$	
$\alpha = 0$	0	0	$4 > 0$	$4 > 0$	Cilindro elíptico ⁴
$0 < \alpha < \pi$	+	-	+ ou -	+	Hiperbolóide de uma folha
$\alpha = \pi$	0	$-8 < 0$	$-4 < 0$	$2 > 0$	Cone

Estudo da quádrlica $x^2 + y^2 - (5 - 4 \cos \alpha)z^2 + 4(2 - \cos \alpha)z - 4 = 0$

Como anteriormente, basta estudar a quádrlica para $\alpha \in [0, \pi]$

A matriz correspondente a esta quádrlica é:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 4 - 2 \cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 - 2 \cos \alpha & 0 & 0 & -5 + 4 \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Os invariantes métricos são para qualquer $\alpha \in [0, \pi]$:

* $|A| = 4 - 4 \cos^2 \alpha$,

* $A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 + 4 \cos \alpha \end{vmatrix} = -5 + 4 \cos \alpha < 0$

* $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 + 4 \cos \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 + 4 \cos \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 8 \cos \alpha < 0$

* $a_{11} + a_{22} + a_{33} = -3 + 4 \cos \alpha$

Na tabela seguinte apresenta-se a classificação das superfícies em função do valor de α .

É preciso ter em conta que o valor absoluto da diferença entre o número de variações de sinal e o número de permanências de sinal da sucessão A_{00} , $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$, $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ e 1 é igual a 1.

⁴ $A_{11} + A_{22} + A_{33} = -8 < 0$.

	$ A $	A_{00}	$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$	$a_{11} + a_{22} + a_{33}$	
α	$4(1 - \cos^2 \alpha)$	$-5 + 4 \cos \alpha$	$-9 + 8 \cos \alpha$	$-3 + 4 \cos \alpha$	
$\alpha = 0$	0	$-1 < 0$	$-1 < 0$	$1 > 0$	Cone
$0 < \alpha < \pi$	+	-	-	+ ou -	Hiperbolóide de uma folha
$\alpha = \pi$	0	$-9 < 0$	$-17 < 0$	$-7 < 0$	Cone

Conclusões

No modelo 1 A, a rede na posição inicial ($\alpha = 0$) é parte de um **cilindro circular** (fig. 3).

Depois de rodar o círculo móvel de $\alpha = \pi$ ou de $\alpha = -\pi$, a rede é parte de um **cone** (fig. 5).

Para qualquer outra rotação do círculo móvel ($\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pi \wedge \alpha \neq -\pi$), a rede é parte de um **hiperbolóide de uma folha** (fig. 4).

No modelo 1 B, a rede na posição inicial ($\alpha = 0$) é parte de um **cone** (fig. 6).

Depois de rodar o círculo móvel de $\alpha = \pi$ ou de $\alpha = -\pi$, a rede também é parte de um **cone** (fig. 8).

Para qualquer outra rotação do círculo móvel ($\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pi \wedge \alpha \neq -\pi$), a rede é parte de um **hiperbolóide de uma folha** (fig.7).

Todas estas superfícies são regradas, isto é, podem ser geradas por rectas. Essas rectas, chamadas geratrizes, são ilustradas nos modelos pelos fios. Nos hiperbolóides de uma folha existem dois sistemas de geratrizes pelo que estas superfícies se dizem duplamente regradas. Por cada ponto de um hiperbolóide de uma folha passa uma geratriz de cada sistema e uma só. Estes dois sistemas visualizam-se pela rotação de ângulos simétricos (veja-se na figura 9 para $\alpha = \pi/4$ e $\alpha = -\pi/4$).

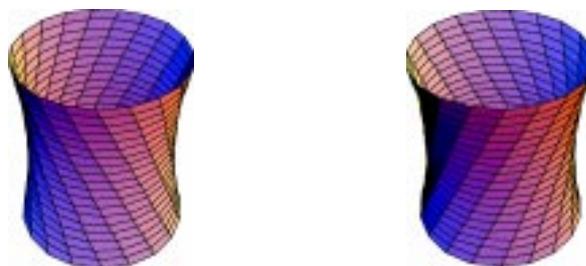
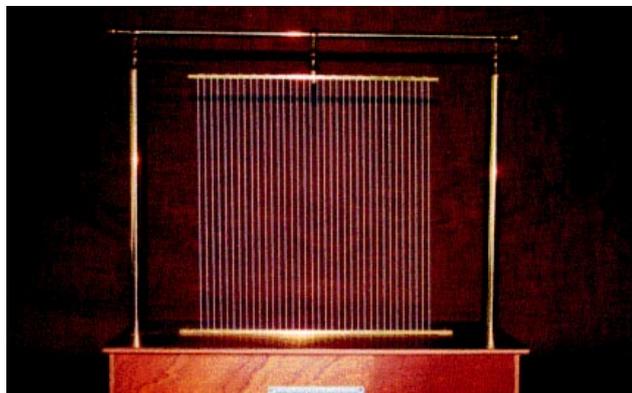


fig. 9

Descrição da réplica 2 e a sua manipulação

Este modelo é constituído por duas barras paralelas que sustentam uma rede de fios, com pesos nas extremidades, que simulam um rectângulo. A barra inferior está fixa. A barra superior pode rodar de um ângulo compreendido entre $-\pi$ e π . Quando manipulamos a barra superior, a rede de fios deixa de simular um rectângulo. No entanto a superfície que descreve é gerada pelas rectas simuladas pelos fios, sendo portanto regrada.



Réplica 2

Modelação e matematização

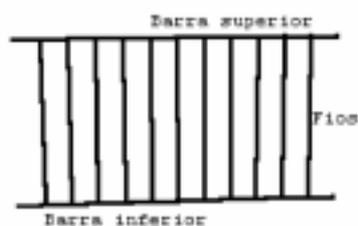


fig. 10

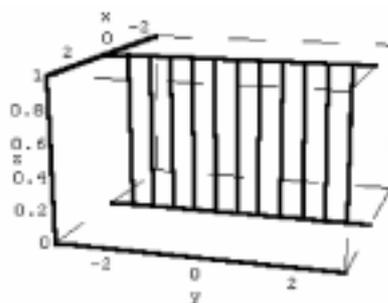


fig. 11

Tal como anteriormente, a figura 11 ilustra o referencial escolhido para caracterizar parametricamente as superfícies simuladas pelos fios desta réplica.

A rede

Cada um dos fios une um ponto da barra inferior com um outro da barra superior. Como estão esticados por pesos, podemos considerar que, na posição inicial, são segmentos de recta paralelos ao eixo Oz. Apesar de no modelo os fios serem em número finito (fig. 10), para o estudo matemático consideramos que há infinitos segmentos, um para cada $t \in [-3,3]$.

A rede de fios simula um rectângulo gerado pelos segmentos. Este rectângulo (fig. 11), assente no plano yOz, está definido pelas equações paramétricas:

$$(x, y, z) = (0, t, u), \quad -3 \leq t \leq 3, \quad 0 \leq u \leq 1$$

Rodar a barra móvel

Ao rodarmos a barra superior os extremos dos fios ligados a ela também rodam. Os extremos da barra fixa permanecem na mesma posição. Se a barra roda de α radianos, cada um dos extremos superiores dos fios roda do mesmo ângulo. Os fios permanecem esticados devido aos pesos. A rede deixa de ser uma superfície plana, gera-se uma nova superfície.

Cada um dos pontos do "segmento móvel" ao rodar descreve uma circunferência no plano de cota 1 com centro no ponto $(0,0,1)$ e raio $|t|$ cuja equação é:

$$(x, y, z) = (t \operatorname{sen} \beta, t \operatorname{cos} \beta, 1), \quad -\pi \leq \beta \leq \pi$$

Quando a barra roda de α radianos a nova superfície está gerada pelos segmentos de extremos $(0, t, 0)$ e $(t \operatorname{sen} \alpha, t \operatorname{cos} \alpha, 1)$. Para $\alpha \in [-\pi, \pi]$ e $t \in [-3, 3]$ estes segmentos estão definidos por:

$$(x, y, z) = (0, t, 0) + k(t \operatorname{sen} \alpha, t \operatorname{cos} \alpha - t, 1), \quad 0 \leq k \leq 1$$

Na figura 12 e seguintes visualizamos o que acontece para vários valores de α . Nas figuras está representada a circunferência descrita pelos extremos da barra móvel para ilustrar melhor a ideia de movimento.

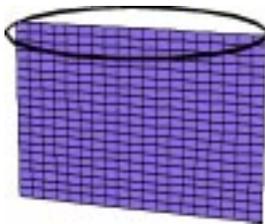


fig. 12: Posição inicial ($\alpha=0$)

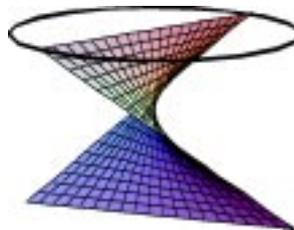


fig.13: $\alpha=3\pi/4$

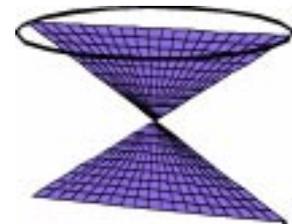


fig. 14: $\alpha=\pi$

Equação da superfície gerada

Pretendemos agora estudar a superfície gerada depois de rodar a barra móvel α radianos. As suas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = kt \operatorname{sen} \alpha \\ y = t + kt \operatorname{cos} \alpha - kt \\ z = k \end{cases} \quad 0 \leq k \leq 1, \quad -3 \leq t \leq 3 \quad \text{para } \alpha \in [-\pi, \pi]$$

Multiplicando a segunda equação por $k \operatorname{sen} \alpha \neq 0$ ⁵, podemos concluir que esta superfície verifica a condição:

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot yz = x + \operatorname{cos} \alpha \cdot xz - xz \Leftrightarrow x - (1 - \operatorname{cos} \alpha) xz - \operatorname{sen} \alpha \cdot yz = 0$$

⁵ Quando $k \operatorname{sen} \alpha = 0$, também se verifica a condição indicada. Se $k = 0$, obtemos o "segmento base". Se $\alpha = 0$ obtemos o rectângulo inicial e se $\alpha = \pi$ ou $\alpha = -\pi$, obtemos dois triângulos assentes no rectângulo anterior.

Estudo da quádrlica $x - (1 - \cos \alpha) xz - \sin \alpha yz = 0$, $\alpha \in]-\pi, \pi[$ e $\alpha \neq 0$

A matriz correspondente a esta quádrlica é:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1-\cos\alpha}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{1-\cos\alpha}{2} & -\frac{\sin\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Os invariantes métricos são:

$$|A| = \frac{\sin^2 \alpha}{16} > 0 \text{ pois } \sin \alpha \neq 0, A_{00} = 0 \text{ e}$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\sin\alpha}{2} \\ -\frac{\sin\alpha}{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1-\cos\alpha}{2} \\ -\frac{1-\cos\alpha}{2} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2+\cos\alpha}{4} < 0$$

A condição estudada corresponde a um **parabolóide hiperbólico**.

Conclusões

A rede na posição inicial ($\alpha = 0$) é parte de um **plano** (fig.12).

Depois de rodar a barra móvel de $\alpha = \pi$ ou $\alpha = -\pi$, a rede também é parte de um **plano** (fig.14).

Para qualquer outra rotação da barra móvel ($\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq \pi \wedge \alpha \neq -\pi$), a rede é parte de um **parabolóide hiperbólico** (fig. 13).

A imagem seguinte ilustra um parabolóide hiperbólico.

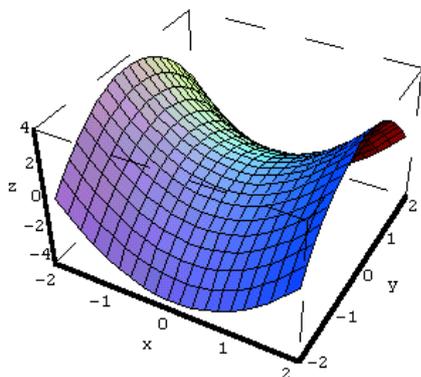


fig. 15

Parece surpreendente que a superfície gerada pelo instrumento seja parte de uma superfície deste tipo. Ajuda a compreendê-lo sabermos que uma das propriedades dos parabolóides hiperbólicos é serem superfícies duplamente regradas. A réplica 2 permite-nos visualizar este modo de gerar uma tal superfície. Os fios fazem parte de uma das famílias de rectas geradoras. Por outro lado, as barras são duas das rectas da outra família.

Bibliografia

ABELLANAS, P., *Geometria Básica*, Madrid, 1969.

ABELLANAS, P., *Elementos de Matemática*, Madrid.

BORSUK, K., *Multidimensional Analytic Geometry*, Varsóvia, 1969.

DIAS AGUDO, F.R., *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica -Vol. II*, Lisboa, 1964.

GONÇALVES, J.V., *Curso de Álgebra Superior*, Lisboa, 1953.

LEROY, C.F.A., *Analyse Appliquée a la Géométrie des Trois Dimensions*, Paris, 1854.

LÓPEZ DE LA RICA, A.; DE LA VILLA CUENCA, A., *Geometria diferencial*, Madrid, 1997.

STRIJK, D. J., *Geometria diferencial clásica*, Madrid, 1973.

Bartoon



Luís Afonso, "Bartoon 3", Contexto Editora, 2000
(Publicação gentilmente autorizada pelo autor)