por **Rui Feiteira**
[Escola Secundária Manuel Teixeira Gomes]

Cores, Grafos e Resolução de Conflitos

Uma das dificuldades com que nos confrontamos nas nossas aulas prende-se com o facto de muitos dos alunos não reconhecerem a utilidade e a importância que a matemática tem no nosso dia-a-dia. Neste artigo pretendemos ilustar o contributo que a matemática pode ter na tomada de decisões no nosso quotidiano, utilizando para tal a coloração de vértices de um grafo.

Considerações iniciais

Com a nova reforma do ensino secundário surgiu uma nova disciplina, optativa para o curso de Científicos Humanísticos de Ciências Sociais e Humanas, a Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). Um dos itens do programa denomina-se Modelos de Grafos e está previsto que seja leccionado no segundo ano daquela disciplina. O programa aponta claramente que conteúdos um professor desta disciplina deve leccionar, mas, na nossa opinião, deixa de fora um conteúdo muito importante, os problemas de coloração. Não concordamos com esta exclusão, pois este tipo de problemas revela-se muito útil na resolução de conflitos. Ainda dentro desta temática, consideramos incontornável o teorema das quatro cores. Este teorema representa um marco na história da matemática, pela riqueza da sua história, e por ter sido o primeiro teorema importante a ser demonstrado com recurso a meios informáticos.

Neste nosso texto referimo-nos apenas a mapas planos, estilo *mapa-mundi*[1]; contudo poderíamos também pensar em mapas esféricos, que estão mais de acordo com a nossa ideia de globo. No entanto, é equivalente estudar problemas de coloração no plano ou na esfera. Informalmente, basta pensar que podemos deformar suficientemente uma esfera até esta se tornar num plano.

Um pouco de história

Tudo começou em 1852 quando Francis Guthrie tentava pintar os condados do Reino Unido, de forma que dois condados adjacentes não tivessem a mesma cor. Neste processo Guthrie apercebeu-se de que para pintar todos os condados conseguia usar apenas quatro cores. Na altura, Francis Guthrie perguntou ao seu irmão Frederick Guthrie, estudante de matemática e aluno de De Morgan, se seria possível pintar qualquer mapa plano com apenas quatro cores. O irmão intrigado apresenta a questão a De Morgan que a estuda e, de alguma forma, ajuda a divulgar o que ficou conhecido como a conjectura das quatro cores: todo o mapa pode ser pintado com um máximo de quatro cores sem que regiões vizinhas admitam a mesma cor.

Estava lançado um desafio que resistiu mais de um século, tendo sido vencido em 1976 por Apple e Haken. A sua demonstração, no entanto, não foi bem aceite pela comunidade matemática, principalmente por dois motivos: parte da demonstração usa o computador e não pode ser verificada à mão e parte dos cálculos efectuados à mão são morosos e muito longos. Perante tanta controvérsia Robertson, Sanders, Seymour e Thomas tentaram melhorar a prova mas acabaram por desistir. Segundo estes autores, em 1993, para sua paz de espírito começaram a tentar provar por eles próprios a conjectura, tendo acabado por obter uma prova mais simples, mas onde ainda assim foi necessária a utilização do computador. Pelo caminho foram publicadas algumas "provas" que continham alguns erros, mas

[1] É um mapa com representação de todo o globo terrestre, sendo os dois hemisférios projectados lado a lado.

mesmo com alguns problemas técnicos também elas ajudaram a impulsionar e a resolver a famosa conjectura. Destacamos a prova de Alfred Kempe (1879) que Heawood, onze anos depois, provou estar errada. Na mesma altura Heawood enunciou e provou o teorema das cinco cores. Em 1922, a conjectura foi provada para qualquer mapa com 25 regiões. Este limite foi sendo melhorado até se atingir, em 1970, 96 regiões.

Temos então agora o teorema das quatro cores: *Para colorir um mapa plano, de forma que em regiões vizinhas não se utilize a mesma cor, quatro cores são suficientes*.

Grafos Completos e Planares

Neste ponto poderá o leitor perguntar: Mas de que forma é que pintar mapas está ligado com matemática? A resposta é simples, mas antes temos que introduzir algumas noções de Teoria dos Grafos.

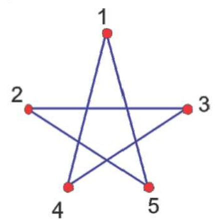

Figura 1

Um grafo é um par[2] ordenado $G=(X,T)$ de conjuntos finitos, onde X é o conjunto de vértices e T é uma colecção de subconjuntos de X com dois elementos. T designa-se por conjunto de arestas. Assim, informalmente, um grafo é um conjunto de vértices com várias ligações (arestas) entre si. Dois vértices dizem-se adjacentes se existe uma aresta que os ligue. Para melhor percebermos o que foi dito, note-se que associamos naturalmente à figura 1 o grafo tal que $X=\{1,2,3,4,5\}$ e $T=\{\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{4,3\}\}$. Dizemos que este é o grafo subjacente à figura, que por sua vez se denomina por representação do grafo.

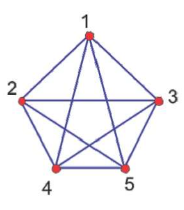

Figura 2

Vamos agora introduzir a noção de grafo completo e grafo planar. Um grafo diz-se completo com n vértices, e designa-se por K_n, se todos os vértices são adjacentes aos outros n-1vértices, isto é, cada vértice está ligado a todos os outros vértices. A seguinte figura representa o K_5. Este tem cinco vértices e cada um deles está ligado a todos os outros

Um grafo diz-se planar se existir alguma representação sua no plano de forma que as suas arestas não se intersectem a não ser nos vértices. As figuras 1 e 3 mostram duas representações do mesmo grafo, sendo apenas uma planar (figura 3).

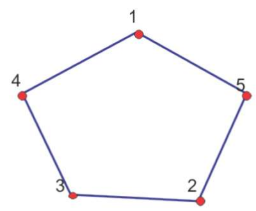

Figura 3

Centremos agora a nossa atenção nos grafos planares. Apesar de terem uma formulação simples, nem sempre é fácil verificar se um dado grafo é planar. Chamamos ciclo de um grafo a uma sequência circular de vértices distintos, tal que dois vértices consecutivos são adjacentes no grafo. Podemos então ver o ciclo como $c=[V_0, V_1,..., V_k]$, onde $V_0=V_1$ e de resto $V_i \neq V_j$ se $i \neq j$, e $\{V_{i-1}, V_i\}$ é uma aresta para $i = 1,..., k$. Estas são as k arestas do ciclo.

Pelo teorema de Jordan (para polígonos), uma curva fechada simples, γ, no plano divide-o em duas regiões, de tal modo que não se pode ligar um ponto de uma região por uma curva sem que esta intersecte γ. Assim, na figura 3, a representação planar do grafo, inteiramente constituído pelos vértices e arestas de um ciclo, divide o plano em duas regiões, uma interior à representação, delimitada por todas as arestas, e uma exterior, que não é limitada. Em geral, há mais do que um ciclo e mais do que uma região. Cada uma destas regiões designa-se por face. O número de arestas que limita uma face designa-se por grau da face. Euler descobriu uma fórmula que relaciona o número de vértices n, o número de arestas m e o número de faces f de um grafo conexo[3] planar: (1) *Seja G um grafo conexo e planar com n vértices, m arestas e f faces. Então n-m+f=2*. Caso a fórmula não seja satisfeita

[2] Por vezes incluem-se lacetes no conjunto das arestas. Um lacete é uma aresta com duas extremidades no mesmo vértice. Note ainda que é usual exigir-se que $X \neq \phi$.

[3] Um grafo diz-se conexo se existir sempre um caminho entre quaisquer dois vértices pertencentes ao grafo.

podemos concluir com segurança que o grafo não é planar. Apresentamos um outro resultado interessante que nos ajuda a concluir se um dado grafo é ou não planar: (2) Seja G um grafo planar, conexo, com m arestas e f faces, tal que cada face está delimitada por pelo menos k arestas. Então $k.f \leq 2m$.

Dois grafos importantes que nos ajudam a decidir se um determinado grafo é ou não planar são o K_5 e o $K_{3,3}$.

Comecemos então por verificar se K_5 é ou não planar. Suponhamos então que sim. Este grafo tem 5 vértices e 10 arestas, logo $n = 5$ e $m = 10$, então por (1) temos que $5\text{-}10\text{+}f = 2$, e portanto, $f = 7$. Por (2), uma vez que não existem ciclos com menos de 3 vértices, temos que $3 \times 7 = 21 > 2 \times 10 = 20$. Então, como a desigualdade não se verifica, foi absurdo supor que K_5 era planar e, portanto, K_5 é não planar.

Consideremos agora o grafo $K_{3,3}$. Comecemos por considerar o seguinte problema: Numa cidade pretende-se ligar três casas 1, 2 e 3 com três fontes de energia 4, 5 e 6. Estas ligações não se podem cruzar. Será possível fazer estas ligações naquela condição? Estamos, portanto, interessados em desenhar num plano um grafo tal que as suas arestas não se intersectem. A seguinte figura apresenta o passo inicial (mas as posições podem não ser fixas).

Figura 4

Convidamos o leitor a tentar resolver esta questão. Para a resolver basta encontrar um grafo planar com 6 vértices e 9 arestas. Depois de várias tentativas poderá ficar com a sensação de que tal ligação não é possível de ser realizada. E, de facto, tem razão, pois este grafo é não planar e, como tal, a ligação é impossível de se realizar. Poderá encontrar uma demonstração geométrica na referência [1].

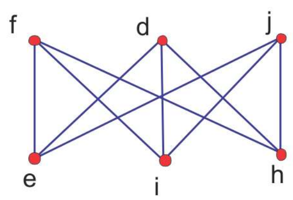

Figura 5 - Grafo $K_{3,3}$

A figura anterior representa o grafo que modela o problema anterior. Vejamos, de facto, que $K_{3,3}$ não é planar. Como atrás, vemos que se $K_{3,3}$ é planar então $f = 2 - n + m = 5$, já que $n = 6$ e $m = 9$. Como no grafo não existem circuitos de comprimento 3 ou menos, por (2) (com $k = 4$), obtém-se que $4 \times 5 \leq 2 \times 9$, o que é falso. Portanto, $K_{3,3}$ não é planar.

As condições (1) e (2) são apenas condições necessárias de planaridade. Existe, no entanto, um outro resultado, que nos fornece uma condição necessária e suficiente de planaridade, o teorema de Kuratowski. Este teorema afirma que um grafo é planar se e só se não admite subgrafos isomorfos a subdivisões de K_5 ou $K_{3,3}$. As subdivisões são obtidas acrescentando vértices nas arestas, isto é, substitui-se uma determinada aresta, por exemplo, a aresta $\{vw\}$ por outras duas arestas $\{vx\}$ e $\{xw\}$, onde x é um novo vértice que também se acrescenta ao conjunto de vértices.

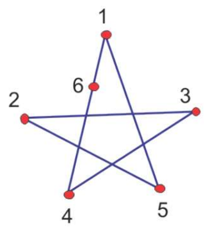

Figura 6

O grafo representado na figura 6 obteve-se a partir do grafo da figura 1, através de uma subdivisão: substituiu-se a aresta {1,4} pelas arestas {1,6} e {6,4}. Consideremos agora o grafo de Petersen (figura 7), e vejamos se este grafo é ou não planar.

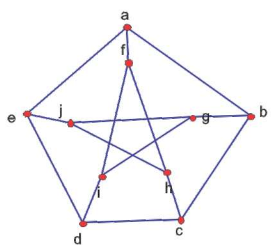

Figura 7

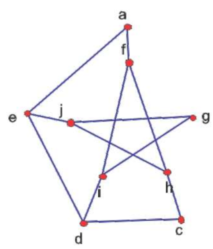

Figura 8

O grafo da figura 8 é um subgrafo do grafo de Petersen, obtido eliminando o vértice b, assim como as arestas incidentes neste vértice. Redesenhemos agora o grafo da figura 8, no grafo da figura 9.

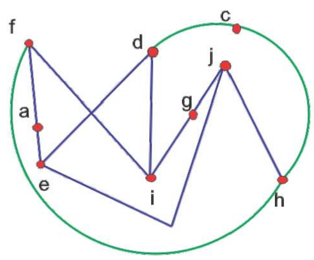

Figura 9

O grafo da figura 9 obteve-se de $K_{3,3}$ (figura 5) através de três subdivisões: substituiu-se a aresta $\{dh\}$ por $\{cd\}$ e $\{ch\}$, substituiu-se a aresta $\{ij\}$ por $\{gi\}$ e $\{gj\}$, e finalmente, substituiu-se a aresta $\{ef\}$ por $\{af\}$ e $\{ae\}$. Portanto, pelo teorema de Kuratowski, o grafo de Petersen não é planar.

Grafos e Coloração

Voltemos à questão inicial: quantas cores são precisas para colorir um mapa, de tal forma que regiões com fronteira comum tenham cores diferentes? Procedamos da seguinte forma: a cada região do mapa associamos um vértice. Dois vértices estão ligados por uma aresta se as respectivas regiões partilharem uma fronteira. No caso de as regiões partilharem uma fronteira desenha-se uma aresta a passar na fronteira. A título de exemplo, vejamos o mapa do distrito de Évora.

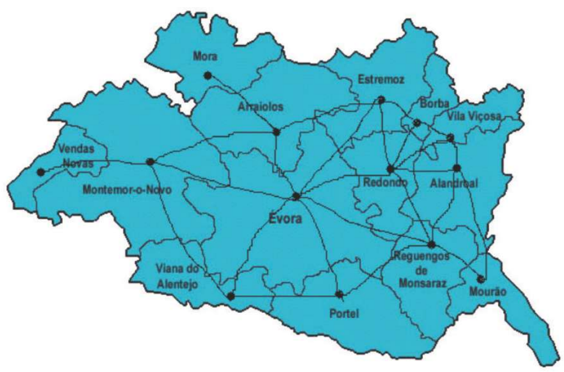

Figura 10 - Distrito de Évora

Obtemos então um grafo planar, com tantos vértices como regiões do mapa. Para melhor visualizar a situação apresentamos a seguir o grafo planar.

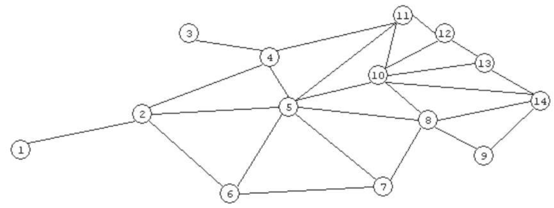

Figura 11

Estamos interessados em colorir os vértices do grafo, ou seja, estamos interessados em encontrar uma coloração para o grafo. Poderíamos usar tantas cores como vértices, mas pretendemos minimizar a quantidade de cores. Mas o que se entende por coloração? Consideremos o grafo $G=(V,A)$. Então uma coloração dos vértices é uma aplicação $c: V \rightarrow S$, onde S designa o conjunto de cores, com a seguinte propriedade: para qualquer $\{uv\} \in A$, $c(u) \neq c(v)$. Quer isto dizer que dois vértices adjacentes terão que ter forçosamente cores diferentes. A questão fulcral é determinar o número mínimo de cores que pode ter S. Para esse efeito consideremos o menor número inteiro positivo k para o qual um grafo é k-colorável. Este número designa-se por número cromático. O número cromático de G é denotado por $\chi(G)$. O teorema das quatro cores afirma que: (3) Se G é um grafo planar então $\chi(G) \leq 4$. Portanto, todo o grafo planar pode ser colorido com um máximo de quatro cores. Com esta certeza, podemos agora colorir o grafo da figura 11.

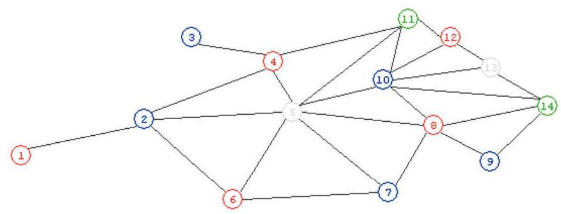

Figura 12

Mas, como seria de esperar, nem todos os mapas precisam de quatro cores e a título de exemplo o mapa do distrito de Faro consegue-se colorir com três cores.

O leitor mais atento poderá agora perguntar: e se o grafo não for planar quantas cores serão precisas? Também existem alguns resultados interessantes. O seguinte resultado ajuda-nos a colocar um limite superior ao número de cores a usar: (4) Todo o grafo G com m arestas satisfaz $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$. No caso do grafo que representa o distrito de Évora, este último resultado não nos ajudaria muito já que obteríamos $\chi(G) \leq 7$. Mas, caso o grafo não fosse planar, já nos daria uma boa ajuda. Vamos apenas considerar dois tipos de grafos: grafos completos e grafos bipartidos. Se considerarmos K_n (grafo com n vértices em que todos os vértices são adjacentes) é óbvio que $\chi(K_n)=n$, isto por definição de grafo completo. Consideremos agora um grafo bipartido completo. Neste caso $\chi(K_{n,m})=2$, visto que num grafo bipartido completo existe uma partição do conjunto de vértices em dois subconjuntos e não existem arestas a ligar vértices do mesmo conjunto. Aliás, existem alguns autores que definem este tipo de grafos através do seu número cromático. Para outros grafos, que não os anteriores, torna-se necessário recorrer a algoritmos heurísticos para encontrar uma coloração. Em termos simplistas, porque este não é de todo o nosso objectivo, não é conhecido nenhum limite para o número cromático baseado em critérios simples. De facto, o problema para a determinação de χ é considerado NP-difícil [2], no sentido em que, à medida que o número de vértices do grafo aumenta, o tempo que um algoritmo necessita para encontrar o número cromático aumenta exponencialmente. Por esta razão, utilizam-se algoritmos heurísticos, de ordem polinomial, mas que podem necessitar de mais do que χ cores, fornecendo assim unicamente um limite superior para o número cromático.

Para o problema da coloração existem vários algoritmos, e o algoritmo que apresentamos deve-se a Christofides: 1) ordenar os vértices por ordem decrescente de grau; 2) colorir o vértice com maior grau com a primeira cor disponível; 3) retirar este vértice e as arestas adjacentes a ele; 4) recalcular os graus dos vértices restantes; 5) reordenar os vértices por ordem não crescente; 6) colorir o primeiro vértice que for possível com a cor inicial; 7) repetir o passo 3) até não ser possível colorir mais vértices com a cor inicial; 8) recomeçar com o passo 1) para outra cor; 9) parar quando todos os vértices estiverem coloridos.

Agora que sabemos como colorir qualquer grafo, pode-se colocar outra questão: existe apenas uma forma de colorir um grafo ou de quantas formas diferentes se pode colori-lo? Para responder a esta questão torna-se necessário introduzir outra noção: a noção de polinómio cromático. Seja G um grafo planar e λ o número de cores disponíveis para colorir os vértices de G. O polinómio cromático de G é a função polinomial de λ, $P(G, \lambda)$, que fornece o total de formas diferentes de como se podem colorir os vértices de G. Vamos de seguida dar uma ideia de como aplicar este conceito. Para isso, consideremos o seguinte grafo.

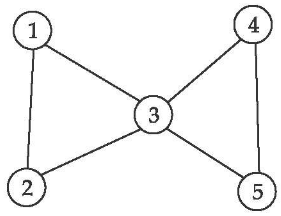

Figura 13

Comecemos, por exemplo, por colorir o vértice 1. Este pode ser colorido de λ formas diferentes, logo para o vértice 2 só poderão usar-se λ-1 cores. Como o vértice 3 é adjacente aos vértices 1 e 2, poderá usar-se λ-2 cores. Para colorir os outros dois vértices podemos voltar a usar as cores dos vértices 1 e 2, e por esta razão teremos, por exemplo, λ-1cores para o vértice 4 e λ-2 cores para o vértice 5. Temos então que $P(G, \lambda) = \lambda.(\lambda -1)^2.(\lambda - 2)^2$. Ora para $\lambda=0 \vee \lambda=1 \vee \lambda=2$ temos que $P(G, \lambda)=0$ e então existem zero formas de colorir o grafo, e portanto, não é possível colori-lo; se $\lambda=3$ temos 12 formas distintas de colorir o grafo anterior, mas sempre usando três cores.

Da Coloração à Resolução de Conflitos

Como já afirmámos, ao colorirmos os vértices de um determinado grafo estamos na verdade a determinar uma partição de V em conjuntos independentes. Estes são conjuntos de vértices entre os quais não existe qualquer ligação. Desta forma, a coloração de grafos é ideal para resolver situações onde existe um conjunto de pessoas que não podem estar em projectos em simultâneo ou um conjunto de materiais em que alguns deles são incompatíveis entre si. Para ilustrar o anterior, analisemos a seguinte situação: suponha que um determinado jardim zoológico adquiriu algumas novas espécies. Alguns destes novos elementos não podem partilhar a mesma jaula. O seguinte grafo mostra quais os elementos que não podem ficar juntos.

Qual será o número de recintos em que podemos colocar os novos animais do Jardim Zoológico? [3].

Nesta situação estamos interessados em distribuir os animais de tal forma que dentro de uma mesma jaula não possam estar dois animais incompatíveis. O grafo que está representado na figura 14 é o grafo de

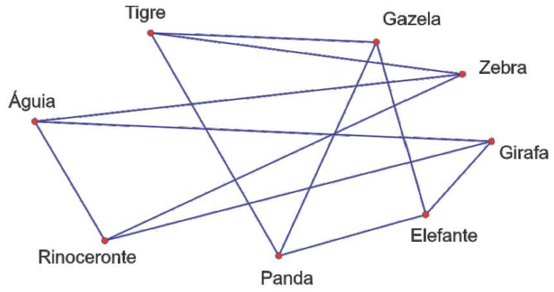

Figura 14

incompatibilidades para a situação descrita. Pode-se resolver esta questão colorindo os vértices daquele grafo, de forma que vértices adjacentes tenham cores diferentes.

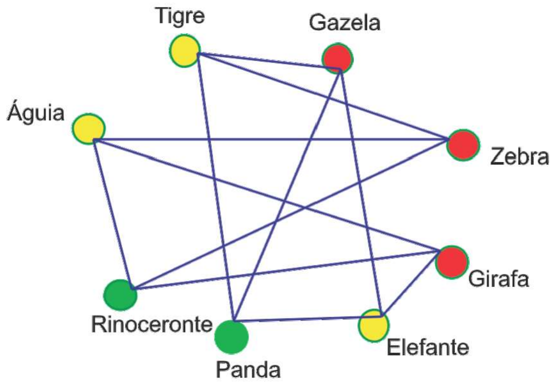

Figura 15

A figura 15 apresenta uma solução possível para a resolução deste problema. Assim, a águia, o tigre e o elefante podem partilhar uma jaula, a gazela, a zebra e a girafa podem partilhar outra jaula, e, finalmente, o rinoceronte e o panda podem partilhar outra. Torna-se óbvio, pelo que já foi descrito atrás, que esta coloração não é a única solução.

Desta forma, vemos como se consegue resolver de uma forma fácil uma questão que à partida poderia parecer de difícil resolução. Este é só um pequeno exemplo, mas existem muitas mais situações em que, recorrendo a coloração dos vértices de um grafo de incompatibilidades, se resolve uma situação que à partida poderia parecer bastante complexa. Obviamente, caso o grafo de incompatibilidades permita uma representação planar, o teorema das quatro cores fornece um limite superior ao número de cores a usar.

Considerações finais

Em jeito de conclusão, procurámos mostrar as potencialidades dos problemas de coloração. Abordámos ainda algumas questões relativas ao teorema das quatro cores. Este teorema, que dominou por mais de um século a mente de alguns dos mais famosos matemáticos, ilustra ainda como enunciados simples de perceber e de enunciar podem ser de difícil demonstração (veja-se o teorema de Fermat). Coloca ainda, em evidência, o facto de o trabalho de um matemático não ter de ser necessariamente solitário, ao contrário do que se julga.

Ao abordarmos este tipo de problemas estamos ainda a contribuir para que os alunos reconheçam, de uma forma inequívoca, o contributo que a matemática pode ter na tomada de decisões no nosso dia-a-dia. M

Agradecimento

O autor agradece as sugestões apresentadas pelo *referee*, pois estas contribuíram em muito para melhorar o presente texto.

Referências

[1] Lima, E. (2004), *Matemática e Ensino*, Gradiva

[2] Foulds, L. R. (1992). *Graph Theory Applications*, Nova Iorque, Springer-Verlag

[3] Rosenstein, J. (1992). "A Comprehensive View of Discrete Mathematics: Chapter 14 of the New Jersey Mathematics Curriculum Framework", In Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F., (eds), *Discrete Mathematics in the Schools*, 133-184, Virginia, AMS e NCTM

Bibliografia

Diestel, R. (2000). *Graph Theory*, Nova Iorque, Springer-Verlag

Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P., Thomas, R. (1996). "A new proof of the four-colour theorem", *Electron. Res. Announ. Am. Math. Soc*, Vol. 2

Scheinerman, E. (2003). *Matemática Discreta*, Pioneira Thomson, S. Paulo