



por Pedro Tadeu [Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e Gestão Instituto Politécnico de Bragança]

Cecília Costa [Departamento de Matemática da Universidade de Trás dos Montes e Alto Douro]

## Polígonos Circulares Descendentes e Ascendentes

Saiba como a exploração com o MatLab de relações entre conceitos de geometria plana elementar e conceitos de álgebra linear nos levou à descoberta de polígonos que designamos “pais” e “filhos” e, a partir destes, de outras belas figuras, como os tapetes circulantes e as espirais poligonais.

### Introdução

Cada vez mais o caminho do ensino conduz a uma utilização sistemática das novas tecnologias, quer ao nível dos últimos anos do ensino secundário quer ao nível dos primeiros anos do ensino superior.

O uso do computador e de poderosas ferramentas cada vez mais ao nosso dispor — concretamente programas como MatLab ou o Mathematica, as calculadoras gráficas, o surgimento das chamadas actividades, actividades interactivas apoiadas nas calculadoras — impõem que o professor, elo essencial, quer numa fase preparatória de elementarização do saber quer no processo de ensino/aprendizagem esteja atento às possibilidades que se abrem e faça uso delas.

O uso de tecnologias, em particular a ferramenta que utilizamos — MatLab —, pode revelar-se de grande importância nos primeiros anos do ensino superior. Este instrumento pedagógico possibilita a execução de actividades de investigação/exploração as quais contribuem de modo significativo para o desenvolvimento de capacidades essenciais, designadamente a auto-confiança, a autonomia, o raciocínio e o pensamento científico. Fomentando a investigação, desenvolve-se no aluno o espírito crítico e contribui-se para criar um outro gosto pela Matemática. É importante que o aluno aprenda a sentir que esta ciência não é algo de imutável e cujo desenvolvimento estagnou há muitos anos, mas, muito pelo contrário, entender a Matemática como algo constantemente a ser desenvolvido, inclusive por si próprio, aluno, no decorrer das suas aulas e das suas tarefas de investigação. Independentemente da importância efectiva da sua contribuição para o enriquecimento do conhecimento matemático colectivo, esta é essencial ao desenvolvimento individual do futuro matemático profissional.

Este trabalho constitui um exemplo de como com ferramentas matemáticas acessíveis a alunos dos dois primeiros anos do ensino superior e com o apoio do programa MatLab se podem realizar actividades de investigação/exploração matemática.

Utilizando a noção de polígono regular, introduziremos os conceitos originais de polígono circulante descendente e polígono circulante ascendente.

Antes de apresentarmos as definições e desenvolvermos os processos que levam à obtenção dos polígonos circulantes, vamos referir o que se entende por matriz circulante e pseudo-inversa ou inversa generalizada de uma matriz.

À matriz quadrada  $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$ , onde  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que denotamos por  $\text{circ}(c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,

chamamos matriz circulante ([3]).

$$\text{Neste texto é relevante a matriz circulante } \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Em termos geométricos, o produto da matriz  $C = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$  pela matriz cujas linhas são as coordenadas dos vértices de um polígono é uma matriz cujas linhas são as coordenadas dos pontos médios dos lados desse polígono. A união destes sucessivos pontos médios dá origem a um outro polígono, "filho", em relação ao original, "pai".

A única matriz que verifica as seguintes quatro equações de Penrose,  $AXA = A; XAX = X; (XA)^T = XA; (AX)^T = AX$ , é designada por pseudo-inversa ([2]) ou inversa generalizada da matriz  $A$  e é denotada por  $A^\dagger$ . Esta noção estende o conceito de inversa de uma matriz quadrada não singular a matrizes quadradas singulares e a matrizes retangulares. No nosso caso, as matrizes circulantes envolvidas são quadradas e singulares quando são de ordem par. Nesta situação, como as matrizes não são de característica máxima, não temos fórmulas para a inversa generalizada ([2]). Aqui procedemos ao cálculo de uma aproximação da inversa generalizada usando a função PINV do programa MatLab. A função  $\text{PINV}, X = \text{PINV}(A)$ , calcula uma matriz  $X$  da mesma dimensão de  $A$ , e o seu cálculo é baseado no processo de decomposição de uma matriz em valores singulares ([1]).

## 2. Polígonos Circulantes Descendentes e Ascendentes

Apresentamos os conceitos de polígonos circulantes descendentes e ascendentes de primeira ordem e de qualquer ordem. As matrizes circulantes e as suas inversas generalizadas desempenham papel fundamental. Para polígonos descendentes, temos:

**Definição 2.1-** Dado o polígono  $G_0 = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$  de  $n$  vértices  $V_i, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 3$  e um inteiro positivo  $k$ , chamamos

polígono circulante descendente de ordem  $k$  ao polígono  $G_k = C^k G_0$ , onde  $C$  é a matriz circulante  $C = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right)$  de ordem  $n$ .

**Exemplo 2.2-** Dado o triângulo  $G_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ , de vértices  $(1,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , obtêm-se

os triângulos circulantes descendentes de 1ª ordem e de 5ª ordem seguintes

$$G_1 = CG_0 = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.25 & 0.433 \\ -0.5 & 0 \\ 0.25 & -0.433 \end{bmatrix},$$

$$G_5 = C^5 G_0 = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0156 & -0.0271 \\ 0.0156 & 0.0271 \\ -0.0313 & 0 \end{bmatrix},$$

e que são ilustrados na Figura 1

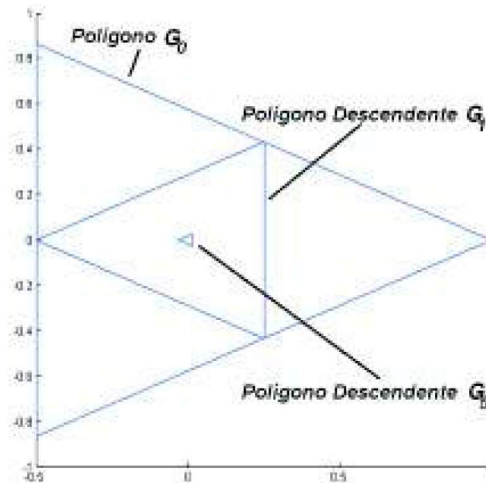


Figura 1

De uma maneira similar ao estabelecido para polígonos circulares descendentes, temos agora para polígonos circulares ascendentes:

**Definição 2.3-** Dado o polígono  $G_k = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$  de  $n$  vértices  $V_i, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 3$  e um inteiro positivo  $k$ ,

chamamos **polígono circulante ascendente de ordem  $k$**  ao polígono  $G_k = (C^\dagger)^k G_0$ , em que  $C^\dagger$  é a inversa generalizada da matriz circulante  $C$  de ordem  $n$ .

**Exemplo 2.4-** Dado o quadrado  $G_0 = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$ , de vértices  $(-0.25, -0.25), (0.25, -0.25), (0.25, 0.25),$

$(-0.25, 0.25)$ , os quadrados circulares ascendentes de 1ª ordem e de 3ª ordem,  $G_{-1}$  e  $G_{-3}$  são definidos por:

$$G_{-1} = (C^\dagger)G_0 = \left(\text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)\right)^\dagger \begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$G_{-3} = (C^\dagger)^3 G_0 = \left( \left( \text{circ} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \right)^\dagger \right)^3 \begin{bmatrix} -0.25 & -0.25 \\ 0.25 & -0.25 \\ 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

estão representados na Figura 2.

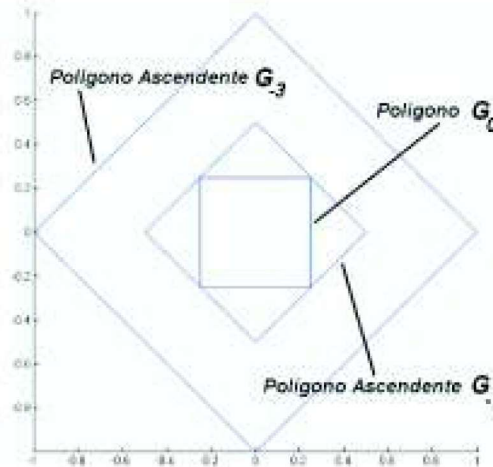


Figura 2

### 3. Aplicações à Geometria

Após termos estabelecido as definições de polígonos circulares, vamos agora utilizá-las na construção de outras figuras: o fractal de Sierpinski, tapetes circulares e espiral poligonal.

#### 3.1 - Fractal de Sierpinski

É bem conhecido o **fractal de Sierpinski**, a repetição sucessiva de triângulos encaixados. Usando as definições descritas é possível efectuarmos a construção desse fractal.

Tomemos o triângulo  $G_0$  de vértices  $A = (0,1)$ ,  $B = (1,0)$  e  $C = (1,1)$ . Construamos o triângulo circular descendente de 1ª ordem  $G_1$  de vértices  $D = (1, \frac{1}{2})$ ,  $E = (\frac{1}{2}, 1)$  e  $F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Na Figura 3 apresentamos os triângulos anteriores.

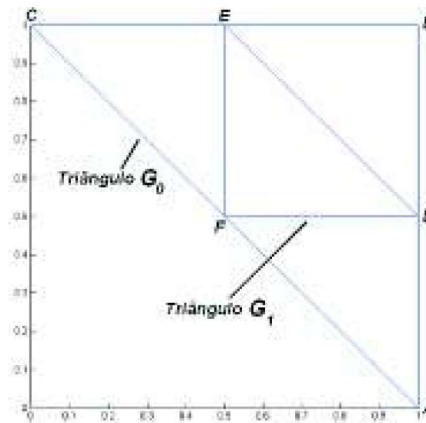


Figura 3



## [Polígonos Circulares Descendentes e Ascendentes]

Repetindo o processo, mas agora em relação aos triângulos  $\Delta[ADF]$ ,  $\Delta[DBE]$  e  $\Delta[FEC]$ , obtemos os seus descendentes de 1ª ordem que são apresentados na Figura 4.

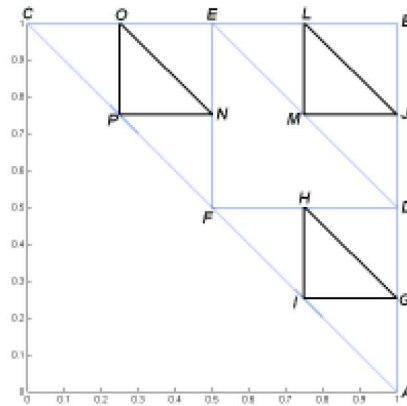


Figura 4

Procedendo como anteriormente, e à custa de triângulos descendentes de 1ª ordem, vamo-nos aproximando do conhecido fractal de Sierpinski.

### 3.2 - Tapetes Circulantes

Nas próximas construções, que intitulamos **tapetes circulantes**, iremos utilizar polígonos circulantes descendentes de várias ordens, com os quais construiremos os tapetes circulantes.

A primeira construção será feita utilizando **triângulos** e os seus descendentes circulantes.

Seja um triângulo  $G_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.5 & -0.866 \end{bmatrix}$  (de vértices  $A, B, C$  respectivamente). Calculemos o seu descendente

circulante de 1ª ordem,  $G_1$  (de vértices  $D, E, F$  respectivamente)

$$G_1 = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.5 & 0.866 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.25 & 0.433 \\ -0.5 & 0 \\ 0.25 & -0.433 \end{bmatrix},$$

que é representado na Figura 5.

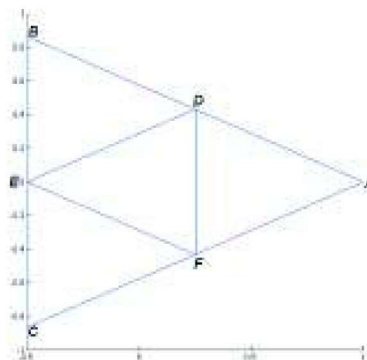


Figura 5

De seguida tomemos os triângulos circulares descendentes de 1ª ordem dos triângulos  $\Delta[ADF]$ ,  $\Delta[DBE]$  e  $\Delta[FEC]$  que se formaram (respectivamente de vértices  $N, O, P; G, H, I$  e  $J, L, M$ )

$$G_{1[ADF]} = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.25 & 0.433 \\ 0.25 & -0.433 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.625 & 0.2165 \\ 0.25 & 0 \\ 0.625 & -0.2165 \end{bmatrix},$$

$$G_{1[DBE]} = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 0.25 & 0.433 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.125 & 0.6495 \\ -0.5 & 0.433 \\ -0.125 & 0.2165 \end{bmatrix},$$

$$G_{1[FEC]} = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \begin{bmatrix} 0.25 & -0.433 \\ -0.5 & 0 \\ -0.5 & -0.866 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.125 & -0.2165 \\ -0.5 & -0.433 \\ -0.125 & -0.6495 \end{bmatrix},$$

que são representados na Figura 6.

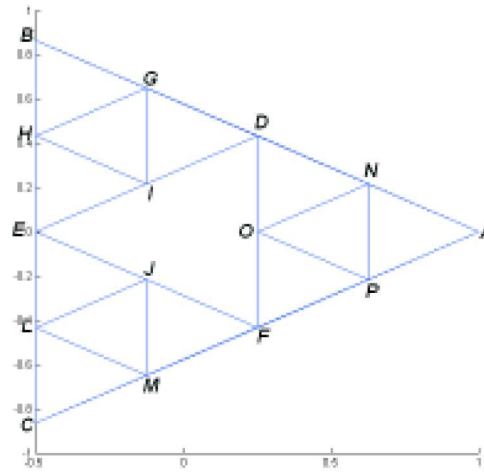


Figura 6

Calculemos agora o descendente circular de 2ª ordem do triângulo  $\Delta[ABC]$ ,  $G_2$ , e os triângulos circulares descendentes de 1ª ordem que restam

$$G_2 = \text{circ}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & 0.866 \\ -0.5 & -0.866 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.125 & 0.2165 \\ -0.125 & 0.2165 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix},$$

O processo continua sempre do mesmo modo. Colorindo somente os triângulos que não são descendentes circulares de nenhum outro, obtemos o **tapete circular triangular** que é representado na Figura 7.

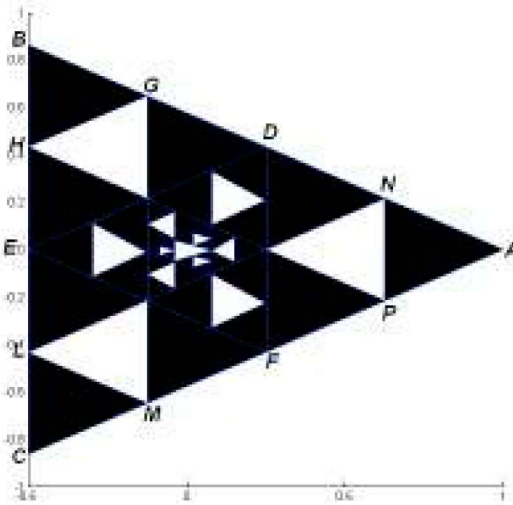


Figura 7

A próxima construção foi efectuada recorrendo a **triângulos e quadrados** e seguindo um processo em tudo idêntico ao anterior.

Tomemos o quadrado  $G_0 = [ABCD]$  e calculemos o seu descendente circulante de 1ª ordem  $G_1 = [EFGH]$ .

Formam-se, após o cálculo do quadrado circulante descendente de 1ª ordem, quatro triângulos:  $\Delta[EBF]$ ,  $\Delta[FCG]$ ,  $\Delta[GDH]$  e  $\Delta[HAE]$ . Calculamos seguidamente os descendentes circulares de 1ª ordem destes quatro triângulos, usando a matriz circulante  $\text{circ} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$  e que são representados na Figura 8.

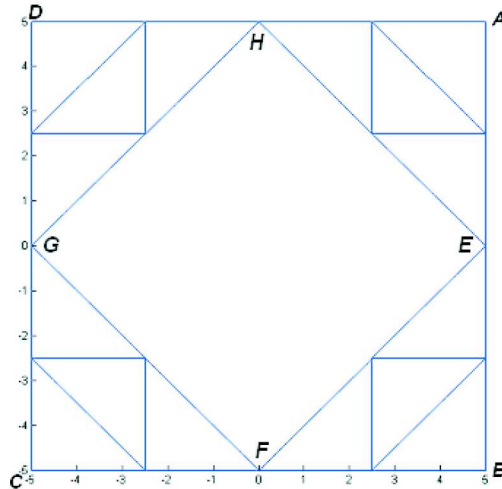


Figura 8

Calculado o quadrado descendente circulante de 2ª ordem do quadrado inicial, passamos ao cálculo dos triângulos circulares descendentes de 1ª ordem que entretanto se formaram, e assim sucessivamente. De cada vez, vamos obtendo mais triângulos e quadrados circulares descendentes dentro da figura. Colorindo de preto os triângulos que não são circulares descendentes de nenhum outro, obtemos o **tapete circulante quadrangular** que é apresentado na Figura 9.

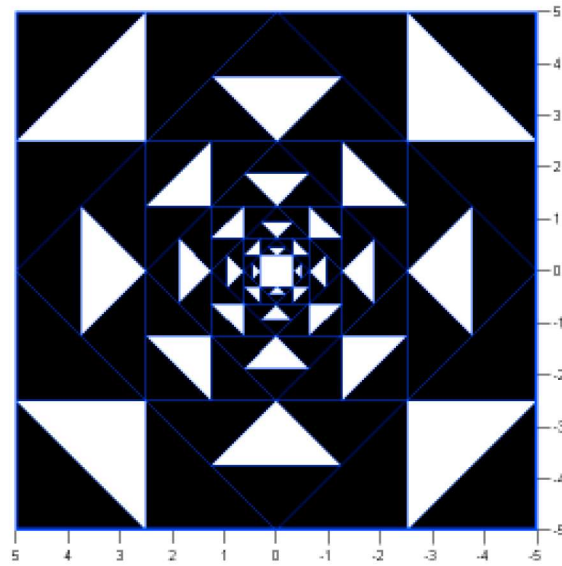


Figura 9

Se, no início da construção, em vez de um quadrado tomássemos um **pentágono**, iríamos obter, por um processo semelhante, um **tapete circulante pentagonal**. Na Figura 10 apresentamos um exemplo do tapete anterior.

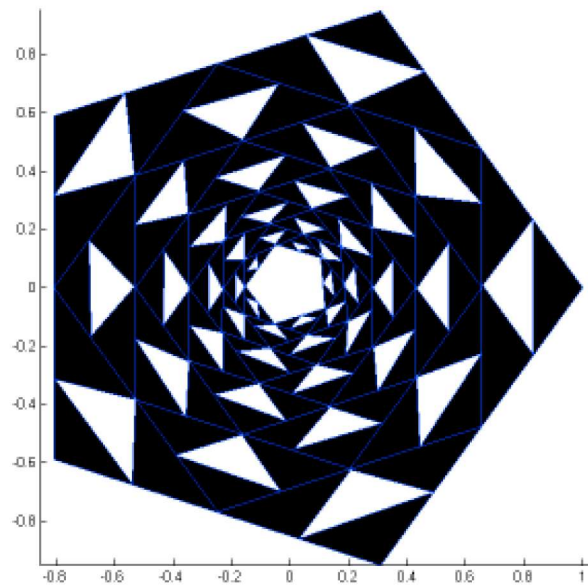


Figura 10

Se o polígono inicial for um **hexágono**, construímos o **tapete circulante hexagonal**. Na Figura 11 ilustramos um tapete circulante hexagonal.



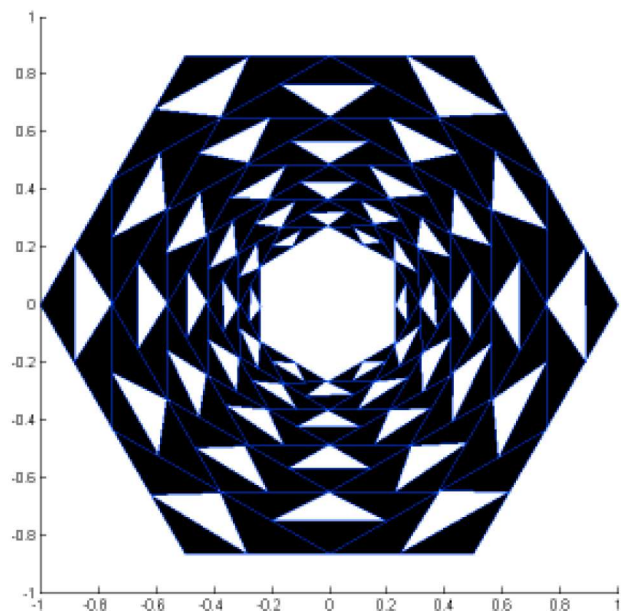


Figura 11

Os tapetes circulares apresentados nas figuras 7, 9, 10 e 11 constituem alguns exemplos dos inúmeros tapetes que se podem obter seguindo o processo de construção que utilizamos.

### 3.3 - Espiral Poligonal

Utilizando as figuras construídas na secção anterior, encontramos um outro tipo de polígono – a **espiral poligonal**. Basta para tal colorir os triângulos adequados à composição da espiral poligonal. O triângulo inicial pertence a cada um dos polígonos circulares originais com que iniciamos a construção do tapete e a partir daí passamos para os seus descendentes sucessivos, como é ilustrado na Figura 12.

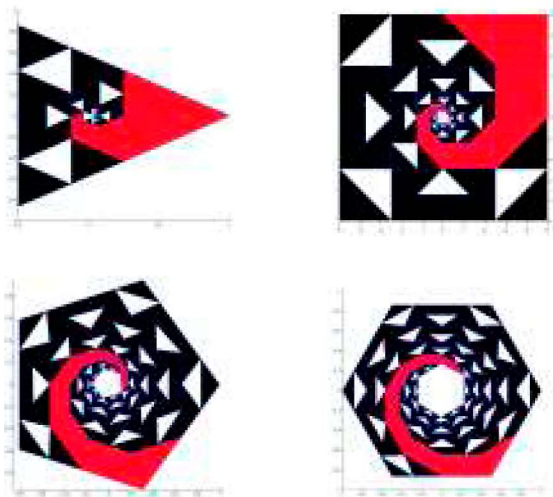


Figura 12

À medida que o número de vértices do polígono inicial vai aumentando, a espiral poligonal aproxima-se cada vez mais da curva espiral que conhecemos.

#### 4. Notas Finais

A necessidade, cada vez mais premente, de se investir no desenvolvimento científico do país e o facto de “(...) diversos estudos em educação terem mostrado que investigar constitui uma poderosa forma de construir conhecimento (...)” ([5]) são factores de incentivo ao recurso, por parte do professor, a actividades de investigação/exploração na sala de aula, em todos os níveis de escolaridade.

A implementação deste tipo de actividades na sala de aula já começa a ser uma realidade, especialmente ao nível do ensino não superior, em parte porque os programas oficiais assim o exigem.

O trabalho que apresentámos pretende ser um contributo no sentido de motivar os professores dos primeiros anos do ensino superior (e em qualquer curso que contemple no seu plano de estudos uma disciplina de Álgebra Linear) para a utilização de actividades de investigação/exploração nas suas aulas.

O estudo feito recorre a ferramentas de Geometria e de Álgebra Linear e serve como exemplo de uma actividade possível de desenvolver com alunos dos primeiros anos do ensino superior. Entendemos ser de destacar a interligação nele efectuada entre estas duas áreas da Matemática, bem como o papel desempenhado pela tecnologia no apoio quer à conjectura quer à obtenção dos resultados.

Terminamos fazendo uma breve referência ao aspecto estético da Matemática, dada a beleza dos tapetes circulantes e das espirais poligonais obtidos. [M](#)

#### Agradecimento

Expressamos aqui o devido agradecimento ao Professor Doutor José Vitória da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, pelas suas sugestões, reparos e disponibilidade com que sempre nos ajudou na elaboração deste artigo.

Agradecemos ainda as sugestões do *referee* que nos permitiu melhorar a forma final deste artigo.

#### Referências

[1] Ben Israel, A.; Greville, T.N.E., (2003). *Generalized Inverses. Theory and applications*, Segunda Edição, Springer-Verlag, Nova Iorque.

[2] Cline, Randall E. (1979). *Elements of The Theory of Generalized Inverses for Matrices*, The UMAP Expository Monograph Series, EDC/UMAP, Newton, Mass.

[3] Davis, Philip J. (1994). *Circulant Matrices*, AMS, 2ª Edição, Nova Iorque.

[4] Meyer, Carl D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Filadélfia.

[5] Ponte, João P. et al. (Org.) (2002). *Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores*, Secção de Educação e Matemática da SPCE, Lisboa.