por Jorge Nuno Silva
[Universidade de Lisboa]

Par ou Ímpar

Em muitas questões matemáticas procura-se padrões que permanecem, quando outros aspectos variam. Por exemplo, uma isometria do plano não altera as áreas das figuras, diz-se que a área é um *invariante* para as isometrias. A identificação de invariantes, alguns muito simples, permite muitas vezes resolver problemas com aspecto complicado…

Vamos propor três problemas que podem ser muito absorventes e complicados, mas que não resistem a uma abordagem simples.

1. A Ara e o Breu disputam o seguinte jogo. Há 100 moedas dispostas numa fila sobre a mesa.

Usam-se moedas de 1, 2, 5, 10, 20 e 50 cêntimos, bem como de 1 e 2 euros. A distribuição inicial é aleatória. A Ara, que joga primeiro, retira uma moeda de uma das extremidades. O Breu, a seguir, retira uma moeda de uma das (novas) extremidades. E assim sucessivamente, até as moedas estarem na posse dos jogadores (50 para cada). Pede-se para mostrar que a Ara, se for esperta, nunca fica mais pobre que o Breu. E se se partisse de 101 moedas?

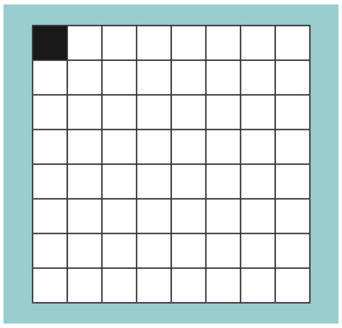
Podem experimentar este jogo com meia dúzia de moedas e constatar que as estratégias óptimas não são sempre fáceis de determinar…

2. Consideremos os trinta e seis primeiros números primos

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151.

Sera que é possível dispô-los numa matriz 6x6 de maneira a obter um quadrado mágico? Relembramos que num quadrado mágico a soma das linhas, colunas e diagonais é a mesma.

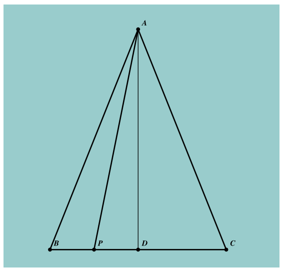
3. Considere um tabuleiro de xadrez com a particularidade de ter uma só casa negra, no canto superior esquerdo.



Pode alterar-se a cor das casas do tabuleiro, desde que se mudem todas de uma linha ou todas de uma coluna. Combinando estas duas operações (alterar cores de linha ou de coluna) poderá obter-se o tabuleiro com todas as casas pintadas de branco?

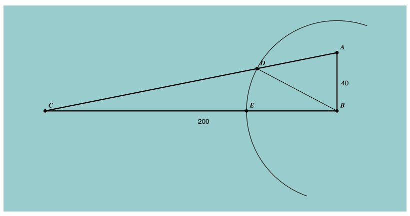
Sobre as questões do número anterior: Seja x a velocidade do comboio mais rápido e y a do mais lento. Os dados dão imediatamente $a+b=m(x+y)$ e $a+b=n(x-y)$ donde, resolvendo o sistema, se obtém $x=(a+b)(m+n)/2mn$ e $y=(a+b)(n-m)/2mn$.

No problema do triângulo isósceles, tracemos a altura AD.



Na notação da figura temos $BP=BD-PD$, $PC=BD+PD$. Multiplicando ordenadamente, obtemos BPx$PC=BD^2-PD^2$. Somando a ambos os membros AP^2 e usando o Teorema de Pitágoras, vem AP^2+BPx$PC = AP^2+BD^2-PD^2 = AD^2+BD^2=AB^2$, que é constante.

Quanto ao problema do cavalo, marquemos os pontos D e E, bem como o segmento DB.



Seja x a medida de BE (e de BD) e α o ângulo DBE.

Em termos de áreas tem-se o seguinte. *Área de BCD* = $100\,x \sin\alpha$, *área de EBD* = $x^2\,\alpha/2$, *área de ABD* = $20\,x \cos\alpha$. Assim, a condição do problema traduz-se por

$$100\,x \sin\alpha - x^2\,\alpha/2 = 2000 \quad \text{e} \quad 20\,x \cos\alpha + x^2\,\alpha/2 = 2000$$

sistema que, quando resolvido, nos dá um valor aproximado de x de 60,92.