Fracções Egípcias

António Machiavelo

Departamento de Matemática Pura da
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

O termo *fracção egípcia* designa uma soma de fracções unitárias distintas, sendo uma fracção unitária simplesmente uma fracção de numerador igual a um. Em rigor, o nome *representação egípcia* seria mais adequado, mas a designação fracção egípcia está de tal forma enraizada que é impossível fazer essa correcção.

Por exemplo,
3/25 = 1/9 + 1/150 + 1/450
é uma representação de 3/25 em fracção egípcia. Usando a igualdade **1/a = 1/(a+1) + 1/(a*(a+1))**, pode-se transformar uma representação numa outra com mais parcelas, concluindo-se assim que a representação está longe de ser única. De facto, pode-se gerar uma infinidade de representações à custa de uma só.

A designação *fracção egípcia* deve-se ao facto dos antigos egípcios representarem todos os números fraccionários essencialmente desse modo. A razão de assim ser é desconhecida. É lamentável que em muitas páginas da internet, e mesmo em bons livros de História da Matemática[1], se leiam frases como «Para além dos inteiros, os Egípcios só concebiam as fracções unitárias» e «Enfim, recusando-se a admitir outras fracções para além das unitárias...». Isto seria análogo a afirmar que nós só concebemos os números de 0 a 9, pois escrevemos todos os outros usando apenas estes!

O famoso papiro Rhind, uma das escassas fontes da matemática egípcia e um dos textos mais antigos que é conhecido, copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmosé[2] de "documentos antigos", nas suas palavras, começa precisamente com uma lista que dá uma representação das fracções da forma **2/n**, com **n** ímpar e variando de 3 a 101, como soma de fracções unitárias distintas. Por exemplo:
2/3 = 1/8 + 1/52 + 1/104
2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890.

A página mantida por Maria João Lagarto, docente da Escola Superior de Educação de Santarém, em:
`http://www.malhatlantica.pt/mathis/`
contém algumas imagens digitalizadas do papiro Rhind, assim como um resumo do seu conteúdo e a transcrição de alguns dos problemas nele contidos.

Não é difícil ver que qualquer número racional positivo tem pelo menos uma representação em fracção egípcia (e portanto, pelo que acima se viu, uma infinidade). Para o caso das fracções que representam números menores que a unidade, é suficiente observar que o algoritmo dito "avarento" ou "voraz" (*greedy*, em inglês) termina sempre num número finito de passos. Este algoritmo consiste em subtrair, ao número racional positivo que se pretende representar em fracção egípcia, a maior fracção unitária que não o ultrapassa, e repetir o processo, sucessivamente, com o que resta, até se obter uma fracção unitária.

Se o número for maior que um, pode-se separar a sua parte inteira da fraccionária, sendo fácil escrever um número inteiro como fracção egípcia usando **1 = 1/2 + 1/3+ 1/6**, juntamente com a igualdade mencionada no segundo parágrafo deste artigo para eliminar fracções unitárias repetidas (deixamos os detalhes como exercício para o leitor).

A representação obtida usando o algoritmo avarento nem sempre é a mais eficiente, tanto em termos do número de fracções como do tamanho dos denominadores. Por exemplo, usando este algoritmo obtém-se:

5/121 = 1/25 +1/757 + 1/763309 + 1/873960180913 + +1/1527612795642093418846225,

enquanto que se tem:

5/121 = 1/33 + 1/121 + 1/363.

Esta é uma curiosa instância onde ser avarento à partida não dá o resultado mais económico no final. É possível que haja aqui algum ensinamento importante!...

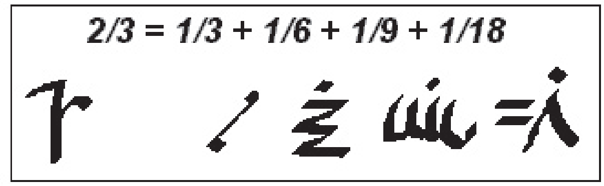
Há alguns resultados notáveis inspirados pelo estudo das fracções egípcias. Limitamo-nos aqui a mencionar um, que é relativamente recente: a demonstração de Ernie Croot, em 2000, da validade da conjectura de Erdös-Graham, que afirma que se os números naturais forem repartidos numa união finita de subconjuntos disjuntos (ou, equivalentemente, forem coloridos usando um número finito de cores), então pode-se escrever 1 como soma de fracções unitárias em que os denominadores pertencem todos a um só desses subconjuntos (são monocromáticos).

Há também alguns problemas em aberto sobre fracções egípcias, sendo talvez o mais notável e conhecido a:

Conjectura de Erdös-Straus[3]: Para todo **n>1** (***n** natural*) existem números naturais ***x***,***y***,***z*** tais que:

4/n = 1/x + 1/y + 1/z.

Thomas Hagedorn, em 2000, demonstrou a validade de uma conjectura análoga, devida a R. H. Hardin e Neil Sloane: para todo o número n ímpar, não divisível por 3, existem números naturais ímpares **x**, **y**, **z**, distintos, tais que **3/n = 1/x + 1/y + 1/z**. Neste contexto, Andrej Schinzel formulou a seguinte conjectura: para todo o número



natural **m** existe um número natural **N** tal que para cada **n>N** se tem **m/n = 1/x + 1/y + 1/z**, para alguns inteiros **x**, **y**, **z**. A sua validade está estabelecida[4] para **m<36**.

Para mais informações sobre estes tópicos, recomendamos as páginas de Ron Knott[5] e David Eppstein[6], cujos endereços são, respectivamente:

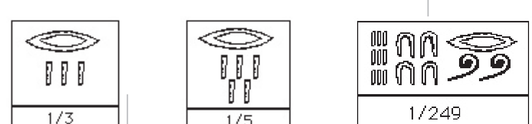
`http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html`

`http://www.ics.uci.edu/~eppstein/numth/egypt/`

e o artigo de Kevin Gong[7] que pode ser obtido em:

`http://kevingong.com/Math/index.html`

Não deixa de ser curioso que uma representação de fracções com milénios de existência continue a ser fonte de inspiração de descobertas sobre propriedades dos números e que haja, ainda, alguns mistérios por desvendar nesta área.



1 A. Dahan-Dalmedico et Jeanne Peiffer, *Une Histoire des Mathématiques: routes et dédales*, Éditions du Seuil, 1986, p. 14 e 15, respectivamente.
2 Ahmes ou Ahmose na transliteração para inglês; desconhecemos a transliteração correcta para português, mas Ahmosé parece-nos razoável.
3 Formulada cerca de 1948 por Paul Erdös (1913--1996) e Ernst Gabor Straus (1922—1983).
4 R. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, Springer-Verlag, 1981, p. 88.
5 Dirige a sua própria empresa de consultadoria e desenvolvimento de software e é "visiting fellow" da Escola de Electrónica e Ciências Físicas da Universidade de Surrey, no Reino Unido.
6 Professor no Departamento de Ciências dos Computadores da Universidade da California, em Irvine.
7 Escrito enquanto este era aluno de mestrado na Universidade de Berkeley; actualmente Gong é engenheiro de software na empresa Danger Research (em Palo Alto, na Califórnia).