



ARITMÉTICA ETÍOPE

O relatório de Leo Bond Roberts, da companhia de construção naval Merritt-Chapman & Scott, de Nova Iorque, relativo aos anos 1929-1931, contém uma descrição pormenorizada de um algoritmo multiplicativo que aprendeu num mercado etíope. O autor nota, há cem anos, que o método se baseia na manipulação de pedrinhas em covas no chão. Já tínhamos encontrado um procedimento conceptualmente semelhante, no Egito Antigo. Em ambos, o recurso à tabuada é desnecessário. Neste texto, analisamos o procedimento e mostramos como se adapta facilmente também à divisão.



JORGE NUNO SILVA
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

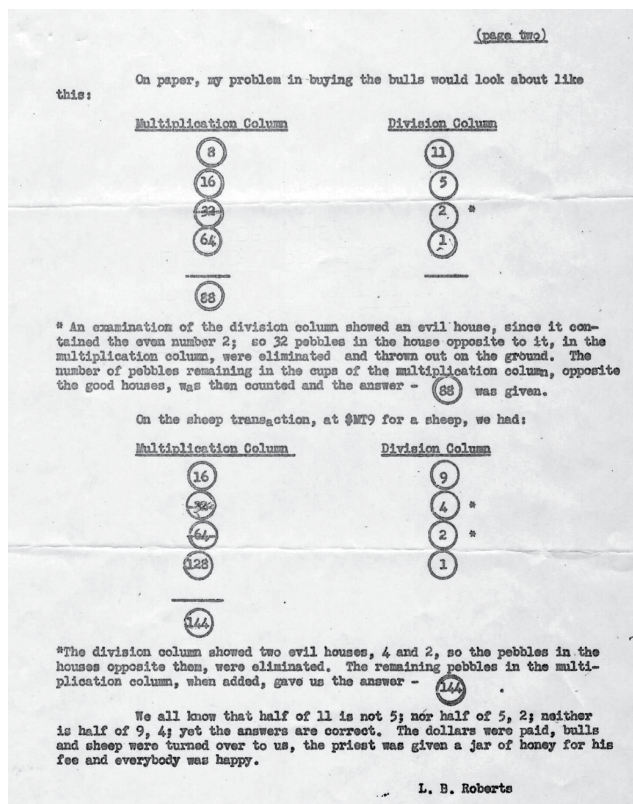
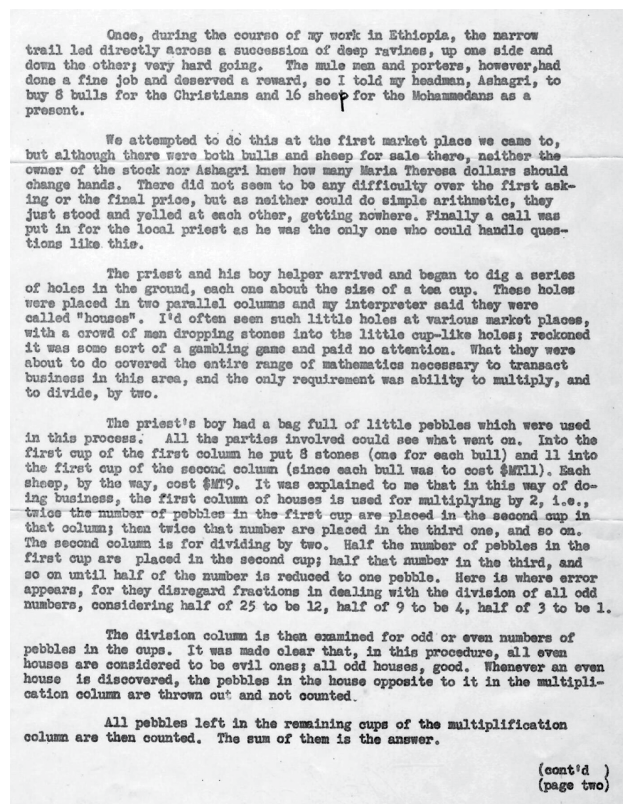


Figura 1. Relatório de L. B. Roberts: testemunho de multiplicação com pedrinhas.

Esta descrição mostra-nos um processo para efectuar multiplicações de números inteiros praticado por um padre na Etiópia de há cem anos. Em linguagem simples, substituindo as covinhas e os seixos por numerais, o algoritmo pode ser descrito da seguinte forma: Criam-se duas colunas, uma encabeçada pelo multiplicando, outra pelo multiplicador. Numa segunda linha coloca-se o dobro do multiplicando e a parte inteira da metade do multiplicador. Estas operações repetem-se até se obter 1 na coluna do multiplicador.

Roberts chama às colunas Multiplicação e Divisão. Nós vamos usar os termos Coluna do Multiplicando e Coluna do Multiplicador, respectivamente.

Agora, seleccionam-se os números ímpares da coluna do multiplicador. A soma dos correspondentes números da coluna do multiplicando dá-nos o produto pretendido.

Eis o primeiro exemplo de Roberts, na nossa notação:

8	11
16	5
32	2
64	1

O processo de duplicações e de “divisões por 2” está terminado. Podemos agora eliminar (ou ignorar) os números da coluna do multiplicando que se opõem a números pares:

8	11
16	5
	2
64	1

Hora de somar os números da coluna do multiplicando, obtendo o produto, 88:

8	11
16	5
	2
64	1
88	

Em vez de apagarmos números do nosso esquema, optemos por assinalar com asteriscos as linhas relevantes, isto é, as que contêm números ímpares na coluna do multiplicador:

8	11	*
16	5	*
32	2	
64	1	*
88		

Nesta notação, o segundo exemplo de Roberts toma o aspecto seguinte.

16	9	*
32	4	
64	2	
128	1	*
144		

Para compreender bem este algoritmo de multiplicação, devemos notar, antes de mais, que se usa a propriedade distributiva. Os números que se somam na coluna da esquerda correspondem aos produtos do multiplicando pelas potências de 2 que ocorrem na representação do multiplicador como soma de potências de 2:

$$8 \times 11 = 8 \times (1 + 2 + 8) = 8 + 16 + 64 = 88$$

$$16 \times 9 = 16 \times (1 + 8) = 16 + 128 = 144$$

O método etíope engloba um mecanismo que permite apurar quais produtos parcelares devem considerar-se para obter o resultado. Na coluna da esquerda, surgem todos os produtos do multiplicando por potências de 2 que podem, potencialmente, fazer parte da decomposição binária do multiplicador. Mas o processo das divisões sucessivas por 2 permite identificar quais as potências relevantes.

Quando representamos o multiplicador em base 2, os coeficientes que forem não nulos (isto é, iguais a 1) assinalam as respectivas potências de 2 que temos de considerar. Ora o processo, a que chamamos *shift*, que move todos os coeficientes para a direita uma casa binária, desprezando o coeficiente da extremidade direita, permite apurar os coeficientes significativos. De cada vez que o resultado do *shift* dê origem a um número ímpar, o número à sua esquerda é o produto da correspondente potência de 2 pelo multiplicando. O facto de se proceder a duplicações sucessivas, na coluna do multiplicando, mantém os operadores das duas colunas sincronizados.

Note-se que o *shift*, em notação binária, corresponde a passar de um número à parte inteira da sua metade.

Trata-se de um método engenhoso, mas maravilhosa-

mente simples de implementar.

A tabela seguinte pretende tornar esta análise mais clara, usando ainda o produto de 8 por 11.

Multiplicando	Multiplicador	Multiplicador em binário
$n \mapsto n \times 2$	$m \mapsto \lfloor m \div 2 \rfloor$	<i>shift</i>
8	11	1011
16	5	101
32	2	10
64	1	1

Não é difícil concluir, pela análise binária do processo, que o algoritmo para a multiplicação $a \times b$ vai ter $\lfloor \log_2 b \rfloor + 1$ linhas. Note-se que a é o multiplicando e b é o multiplicador.

Os egípcios antigos utilizavam um método semelhante de multiplicação, que também fazia apelo à multiplicação por 2 e evitava qualquer outra tabuada. Pode encontrar-se a descrição desse processo em [1, 3] e, nas páginas desta *Gazeta*, em [5].

Nas referências citadas, pode também apreciar-se a forma engenhosa como os egípcios de há 4000 anos efectuavam divisões, essencialmente procedendo como no algoritmo da multiplicação (de novo, sem tabuada!).

Também o método etíope que acabámos de descrever pode ser utilizado na criação de um processo para efectuar divisões, recorrendo a covinhas e pedrinhas.

Ilustremos com um exemplo. Suponhamos que procuramos o resultado da divisão de 105 por 3. Procuramos, portanto, um número x que, multiplicado por 3, nos dê 105. Ora a multiplicação $3 \times x = 105$ tem um algoritmo nas covinhas que podemos representar assim:

3	
6	
12	
24	
48	
96	1
105	

Construímos este esquema duplicando sucessivamente o multiplicando e terminando quando o dobro do número obtido ultrapassasse o objectivo, 105. Claro que, no algoritmo da multiplicação, ao último número obtido na colu-

na da esquerda opõe-se o 1 na coluna da direita.

A tarefa resume-se agora a operar na coluna da direita, de baixo para cima, começando no 1. Pela descrição do processo multiplicativo, na linha precedente deve surgir um 2 ou um 3. Como saber qual?...

Ora, na coluna da esquerda, os números que somam 105 são 96, 6 e 3. Portanto, são exactamente estes que têm números ímpares nos lugares correspondentes da coluna da direita. Assim, sabemos que o número à frente do 48 deve ser par, só pode ser 2. O mesmo sucede com 24 e 12, o que permite determinar inequivocamente as entradas nesta tabela:

3	
6	
12	8
24	4
48	2
96	1
105	

Ao 6 deve opor-se um número ímpar, que só poderá ser 17. Ao 3 deve opor-se também um ímpar, que necessariamente será 35. E este é o resultado pretendido: $105 \div 3 = 35$.

3	35
6	17
12	8
24	4
48	2
96	1
105	

Usemos asteriscos, do lado esquerdo, para assinalar as parcelas que, na coluna da esquerda, se devem somar para obter o dividendo:

*	3	35
*	6	17
	12	8
	24	4
	48	2
*	96	1
	105	

Os asteriscos marcam, assim, as linhas em que ocorrem números ímpares na coluna da direita.

Vejamos um último exemplo, agora com esta representação, $147 \div 7$. De novo, “armamos a conta” $7 \times x = 147$:

7	
14	
28	
56	
112	1
147	

Determinar os números da coluna da esquerda que somam 147 faz-se de baixo para cima, começando com 112 e juntando sucessivamente as parcelas que gerem um total que não exceda 147:

*	7	
	14	
*	28	
	56	
*	112	1
	147	

Finalmente, na coluna da direita, trabalhamos de baixo para cima, a partir do 1, duplicando as entradas e adicionando uma unidade nas linhas com asteriscos, onde queremos obter números ímpares. O número final, que encabeçará a coluna da direita, é o quociente pretendido.

*	7	21
	14	10
*	28	5
	56	2
*	112	1
	147	

O número de linhas deste algoritmo para $a \div b$ será, à semelhança do anterior, dado por $\lfloor \log_2 a - \log_2 b \rfloor + 1$.

O padre que surge, no relato de L. B. Roberts, como única pessoa da comunidade capaz de determinar o preço de oito bois, se cada boi custar 11 unidades monetárias, ganhou um pote de mel pelo serviço. Estamos em crer que o mesmo religioso ganharia mais uma dose de mel se lhe pedissem para determinar o preço de cada boi, sabendo que pagaram 88 unidades monetárias por oito bois.

À semelhança dos processos do Egipto Antigo, o método etíope das covinhas viabiliza um tratamento unificado para a multiplicação e para a divisão.

As covinhas no chão, só por si, já são misteriosas. Isto por causa do mancala.

Mancala é uma família de jogos tradicionais de estratégia que se praticam em tabuleiros ou linhas de covinhas no solo, usando sementes ou pequenas pedras. Trata-se de jogos muito antigos, difíceis de datar dada a forma da sua prática. Contudo, é certo que se praticam há vários milénios. Há muitas variantes de mancala em África e na Ásia, algumas usam disposições de quatro filas de covinhas, outras três ou duas filas. Ver [6]. A sua prática contemporânea ainda recorre, muitas vezes, a implementações ancestrais. Na figura 2 vemos um exemplo actual da prática do mancala em covinhas no solo.



Figura 2. Jogando uma variante de quatro filas, no Sudão.
Foto De Voogt.

Uma variante, o ouri, é popular também em Portugal, tendo integrado a selecção do Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos por vários anos.¹ O ouri é originário de Cabo Verde e usa disposição de duas filas de covinhas.

Na figura 3, retirada de [2], vemos duas linhas de covinhas cavadas no solo, perto de um monumento fúnebre com 5000 anos. O terreno em que foram implementadas leva a crer que se pretendeu que a obra não desaparecesse rapidamente. O autor do relatório citado também refere aparatos semelhantes. Em tradução nossa:

“Tinha visto com frequência tais pequenas cavidades em vários mercados, com uma multidão de homens lançando pedrinhas para dentro das cavidades em forma de taça; pensei tratar-se de um jogo de apostas e não lhes prestei atenção.”

¹Ver <https://ludicum.org/cnjm/>

É natural supor que as duas filas de covinhas, quando implementadas em local de comércio, teriam a dupla função de terreno de jogo e “máquina de calcular”. Esta utilização dupla não foi considerada, de início, por L. B. Roberts, naturalmente.



Figura 3. Mancala, calculadora, ou ambos? Foto Veronica Waweru.

As práticas de cálculo numérico e os jogos de tabuleiro não são mundos totalmente separados. Nomeadamente, surgiram vários métodos, ao longo dos tempos, para usar o tabuleiro quadrado 8×8 como calculadora, atribuindo valores às respectivas casas. Contudo, o *Ábaco de Neper* destaca-se por dar uma utilização aritmética muito sofisticada ao vulgar tabuleiro de Damas. A ele voltaremos em breve.

REFERÊNCIAS

[1] Clagett, Marshall (1999). *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Volume III: Ancient Egyptian Mathematics*. Philadelphia: American Philosophical Society. isbn: 0871692325.

[2] Cummings, Mike (fev. de 2024). “A Local Tip Helps Reveal An Ancient ‘Arcade’ in Kenya’s Highlands”. Em: *YaleNews*. Accessed: 2025-04-20. <https://news.yale.edu/2024/02/01/local-tip-helps-reveal-ancient-arcade-kenyas-highlands>.

[3] Gillings, Richard J. (1982). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. New York: Dover Publications. isbn: 9780486243153.

[4] Roberts, Leo Bond (dez. de 1948). “Report of Leo Bond Roberts”. Em: *Monthly Newsletter from the Office of the Assistant to the President, Merritt-Chapman & Scott*. Smithsonian Institution Archives: Record Unit 7006, Alexander Wetmore Papers, Box 56, Folder 7.

[5] Silva, Jorge Nuno (mar. de 2024). “Contas Egípcias”. Em: *Gazeta de Matemática* 202, pp. 23–27. <https://gazeta.spm.pt/fichagazeta?id=202>.

[6] Voogt, Alexander J. de (1997). *Mancala Board Games*. London: British Museum Press. isbn: 9780714125367.