



REFLEXÕES SOBRE UMA CONSTRUÇÃO DE DUDENEY

RUI DUARTE^a e ANTÓNIO GUEDES DE OLIVEIRA^b

^aCIDMA E DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, UNIVERSIDADE DE AVEIRO

^bCMUP E DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULDADE DE CIÊNCIAS, UNIVERSIDADE DO PORTO

rduarte@ua.pt^a e agoliv@fc.up.pt^b

A que triângulos se pode estender a decomposição de Dudeney, de um triângulo equilátero em quatro polígonos que também formam um quadrado?

Num artigo recente da *Gazeta*¹, considerou-se uma construção de Henry Dudeney, onde se divide um triângulo equilátero em quatro partes que, reorganizadas através de translações e meias-voltas, formam um quadrado. Dudeney afirmava que este é o número mínimo de partes (polígonos) em que se pode dividir um triângulo equilátero de modo a poder reconstruir-se um quadrado nestas condições. Já depois de publicado o referido artigo e passados mais de cem anos sobre a afirmação de Dudeney, foi agora, finalmente, anunciada uma prova de que não é possível fazer o mesmo com menos de quatro elementos.²

Refletindo sobre a construção, facilmente se conclui (como cremos que fez o próprio Dudeney) que o facto de o triângulo ser equilátero não é essencial. Apresentamos um exemplo na figura 1.

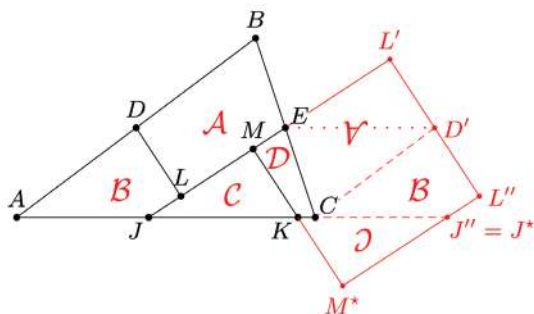


Figura 1. Decomposição de Dudeney.

Como se lembrará logo adiante, esta construção é baseada num lado, $\overline{AC}$, que tomamos por base, e no ponto médio E do lado oposto a A .³

É natural perguntarmo-nos se, num triângulo sem a simetria do triângulo equilátero, se tomássemos outra base e o ponto médio de outro lado obteríamos ou não uma decomposição do mesmo tipo, do mesmo modo. Por exemplo, no triângulo da figura 1, qualquer lado e qualquer ponto médio de um lado adjacente conduzem a uma decomposição deste tipo. Há alguma maneira fácil de saber isto sem fazer as construções, por exemplo, através de um simples programa de computador?

A resposta, afirmativa, decorre de condições que podemos obter *analiticamente* do modo que aqui descrevemos (analiticamente, mas sem coordenadas, como se vai ver). A possibilidade de fazer a construção é caracterizada pela posição de um determinado ponto num certo quadrado, posição que é depois controlada pelas distâncias a determinados pontos. Note-se que o fazemos menos pelos resultados obtidos do que pela descrição, em si, do método utilizado.

Sejam α a área do triângulo, $\alpha = \text{área}(\triangle ABC)$, $a = |BC|$, $b = |AC|$ e $c = |AB|$, D e E os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respetivamente, e, caso exista, $J \in \overline{AC}$ tal que $|EJ| = \sqrt{\alpha}$.⁴ Sejam ainda, caso existam, $K \in \overline{AC}$ tal que $|JK| = |DE| = |AC|/2$, e L e M os pés da perpendicular de D e K sobre $\overleftrightarrow{EJ}$, respetivamente, sendo ambos pertencentes a $\overleftrightarrow{EJ}$. Temos então o triângulo decomposto nos polígonos *convexos* $\square BELD$, $\square ADLJ$, $\triangle JMK$ e $\square CKME$.⁵ Diremos assim que $\triangle ABC$ admite uma decomposição de Dudeney de base $\overline{AC}$ em torno de C .

Uma primeira condição necessária para a existência de um ponto J nestas condições é que $\sqrt{\alpha}$ seja maior do que a distância do ponto E a $\overleftrightarrow{AC}$, que é metade da altura h rela-

¹A. Guedes de Oliveira e M. Rosário Pinto, "Dudeney e os seus 'puzzles'", *Gazeta de Matemática* 204 pp. 204-210.

²E.D. Demaine, T. Kamata e R. Uehara, "Dudeney's Dissection is Optimal", *arXiv:2412.03865*.

³No que se segue, denotamos por $\overline{AB}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ e $|AB|$, respetivamente, o segmento que une os pontos A e B , a semirreta com origem em A que passa por B , a reta por A e B e o comprimento do segmento que une A e B .

⁴À partida, poderão ser dois os pontos $J \in \overline{AC}$ tais que $|EJ| = \sqrt{\alpha}$. Consideramos só o mais próximo de A , porque para o outro, no lado oposto a A relativamente à mediatriz destes dois pontos, o pé da perpendicular por D à reta por E e por este ponto J não está em $\overleftrightarrow{EJ}$.

⁵Poderá ser $K = C$, por exemplo, sendo então $\square CKME$ um triângulo e não um quadrilátero.

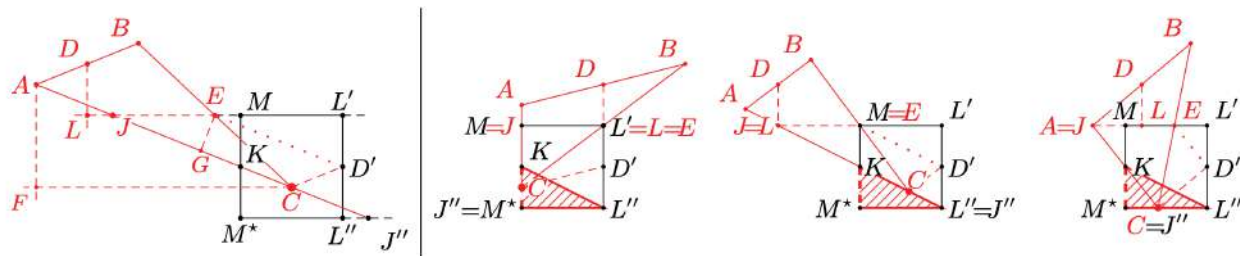


Figura 2. Impossibilidade e situações-limite da decomposição.

tiva à base $\overline{AC}$.⁶ Isto é, tem de ser $\sqrt{\alpha} > \frac{h}{2}$, ou seja, $b > \sqrt{\alpha}$. Por esta razão, no que segue consideramos que $b^2 > \alpha$. Do mesmo modo que no artigo referido, rodando $\square BELD$ 180° em torno de E e $\triangle JMK$ 180° em torno de K , e trasladando $\square ADLJ$ pelo vetor $\overrightarrow{AC}$, obtemos com $\square CKME$ a decomposição de um quadrado, $\square ML'L''M^*$, onde L' é o rodado de L pela primeira rotação, L'' é o trasladado do mesmo ponto, e M^* é o rodado de M pela segunda rotação.

Construção Inversa

Para simplificar a nossa análise, vamos considerar a construção inversa desta, onde começamos por tomar um quadrado, $\mathcal{Q} = \square ML'L''M^*$, e um ponto C no quadrado, no semiplano definido por $\overleftrightarrow{KD'}$ a que pertencem M^* e L'' ($C \notin \overleftrightarrow{KD'}$), onde K e D' são os pontos médios de $\overline{MM^*}$ e $\overline{L'L''}$, respetivamente. A partir destes dados, determinamos os pontos A e B de tal modo que é $\mathcal{Q}$ o quadrado construído como atrás a partir de $\triangle ABC$.

O caminho é bastante claro: Por construção, sendo K e D' os pontos médios de $\overline{MM^*}$ e $\overline{L'L''}$, respetivamente, e J'' o ponto de interseção de $\overleftrightarrow{KC}$ com $\overline{M^*L''}$, determinamos $E \in \overline{ML'}$ sabendo que $|EM| = |JL| = |J''L''|$. Então, $\overleftrightarrow{ED'}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são paralelas, assim como $\overleftrightarrow{CD'}$ e $\overleftrightarrow{AD}$. Na verdade, se O é o ponto de $\overline{EC}$ tal que $|OC| = 2|EC|$ e h é a homotetia de centro O e razão $-\frac{1}{2}$, então $D' = h(A)$, porque $h(B) = C$ e $h(C) = E$. A homotetia inversa determina $\triangle ABC$.

No entanto, $\alpha = \text{área}(\triangle ABC)$ é, ainda, a área do quadrado $\mathcal{Q}$ inicial, e o mesmo acontece para qualquer triângulo assim construído. De facto (ver figura 2, à esquerda), se F é o pé da perpendicular por A à reta paralela a $\overline{L'M}$ por C , e G é o pé da perpendicular de E sobre $\overline{AC}$, os triângulos retângulos $\triangle EGJ$ e $\triangle AFC$ são semelhantes e então

$$\frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|EG|}{|EJ|},$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \alpha &= \text{área}(\triangle ABC) \\ &= |AC||EG| \\ &= |AF||EJ| \\ &= |MM^*||M^*L''| \\ &= \text{área}(\square ML'L''M^*) \end{aligned}$$

Consequências métricas

Note-se que $E \in \overline{ML'}$ (ou, equivalentemente, $L \in \overline{JE}$) se, e só se, $J'' \in \overline{M^*L''}$. Como $b = |AC| = |JJ''| = 2|KJ''|$ e $C \in \overline{KJ''}$, também $J \in \overline{AC}$ neste caso, e $J'' \neq M^*$ porque $b > \sqrt{\alpha}$. Portanto, o triângulo $\triangle ABC$ admite uma decomposição de Dudeney de base $\overline{AC}$ em torno de C se, e só se, $C \in \triangle KJ''M^*$ (excluindo $\overline{KM^*}$). Acima, na figura 2, está um exemplo em que isto não se passa (à esquerda), bem como as três situações-limite, notando que na primeira situação a decomposição (em três polígonos) não é do mesmo tipo.

O ponto C fica então caracterizado pela posição de $J'' \in \overline{M^*L''}$ e pelos limites às suas distâncias a E a seguir estudados, $|CE| = |BC|/2$, a K , $|CK| = |AC|/2$, e a D' , $|CD'| = |AB|/2$. Primeiro, é claro que $\sqrt{\alpha}/2 = |KM^*| < |KJ''| \leq |KL''| = \sqrt{5\alpha}/2$, como simples aplicação do Teorema de Pitágoras.

Se X é o centro de $\mathcal{Q}$, então $|XJ''| \geq |XK|$, pelo que o pé P da perpendicular a $\overleftrightarrow{AJ''}$ por E pertence a $\overline{AK}$, uma vez que K está no círculo da circunferência centrada em X por J'' e por E , a que P pertence. Portanto, $|EK| \leq |EC| \leq |EJ''|$, e se $|EK| \leq d \leq |EJ''|$, então só existe um ponto $Q \in \overline{KJ''}$ tal que $|EQ| = d$. Finalmente, se $Q \in \overline{JJ''}$, então $Q \in \overline{KJ''}$ se, e só se, $|D'Q| \leq |D'K| = \sqrt{\alpha}$.

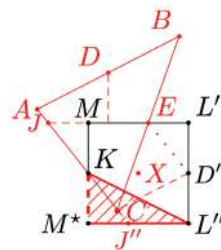


Figura 3. Posição de C .

Agora, aplicações sucessivas do Teorema de Pitágoras dão-nos os valores dos limites em falta, nomeadamente o de $|EK|$ e o de $|EJ''|$.⁷

Suponhamos então que é dado $\triangle ABC$ de lados $a = |BC|$, $b = |AC|$ e $c = |AB|$, e que queremos saber se admite determinada decomposição de Dudeney. A sua área, pela fórmula de Herão, é dada por

$$\alpha = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}.$$

O triângulo admite uma tal decomposição se, e só se,

$$\begin{cases} |KM^*| < |KJ''| \leq |KL''|, \\ |EK| \leq |EC| \leq |EJ''| \\ |D'C| \leq |D'K|. \end{cases}$$

Utilizámos estes critérios para estudar brevemente os 9291 triângulos de lados inteiros a, b, c com $1 \leq a \leq b \leq c \leq \min(50, a+b)$ e $\text{MDC}(a, b, c) = 1$. Pudemos constatar que em cerca de 45% dos triângulos testados há uma decomposição de Dudeney quaisquer que sejam a base e o ponto médio de um lado adjacente, e que em cerca de 33% não há nenhuma decomposição deste tipo.

Mais interessante, talvez, é o facto de termos constatado também que em cerca de 5% dos casos há *um único* lado e *um único* vértice para os quais existe uma decomposição deste tipo. Damos exemplo de um destes triângulos na figura 4, em que é unicamente possível construir uma tal decomposição com base no lado $\overline{AC}$ e em torno de A .

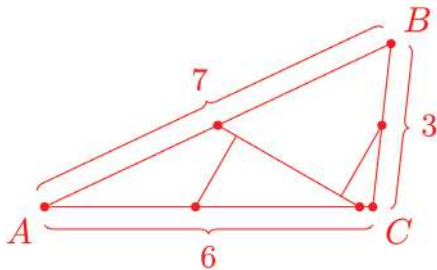


Figura 4. Decomposição única.

Nota

Poderá o leitor perguntar-se agora se, nos casos em que o triângulo não admite uma decomposição de Dudeney, admite uma decomposição “parecida”. Veja-se a figura 5, obtida repetindo indefinidamente o triângulo e os quadra-

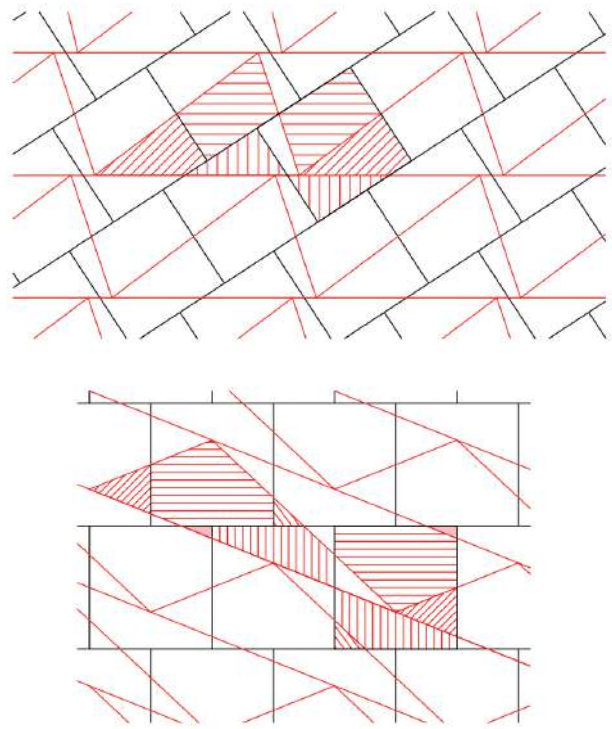


Figura 5. Pavimentações.

dos de modo a obter duas pavimentações do plano, que, por si só, determinam a decomposição. Note-se, no entanto, que, por exemplo, as mesmas pavimentações numa outra posição relativa já não determinam, em geral, uma decomposição.

Chama-se *dissecção* de um polígono noutra à decomposição de ambos os polígonos num mesmo conjunto (finito) de polígonos mais pequenos. Os dois polígonos iniciais dizem-se *equidissectíveis*. As dissecções que apresentamos na figura 6, em cada caso em cinco polígonos e de um triângulo num hexágono, assemelham-se um pouco à dissecção de Dudeney. Tem sobre esta dois defeitos fundamentais: o hexágono não é regular (embora tenha lados iguais, os ângulos internos não o são) e depende (quanto ao lado e quanto aos ângulos internos) da base e da altu-

⁶ Se $\sqrt{\alpha}$ é a distância do ponto E a $\overleftrightarrow{AC}$, isto é, se $b = \frac{1}{2}$, então $\overline{EJ} \perp \overline{AC}$, $M = E$, $L = J$ e a decomposição é feita em três polígonos só.

⁷ Note-se que

$$\begin{aligned} |M^*J''| &= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \alpha} \quad \text{e} \quad |ME| = \sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \alpha}; \quad \text{portanto,} \\ |EK| &= \sqrt{\frac{a}{4} + \left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \alpha}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha + b^2 - 4\sqrt{\alpha}\sqrt{b^2 - \alpha}}; \\ |EJ''| &= \sqrt{\alpha + \left(\sqrt{b^2 - \alpha} - \sqrt{\alpha}\right)^2} = \sqrt{\alpha + b^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{b^2 - \alpha}}. \end{aligned}$$

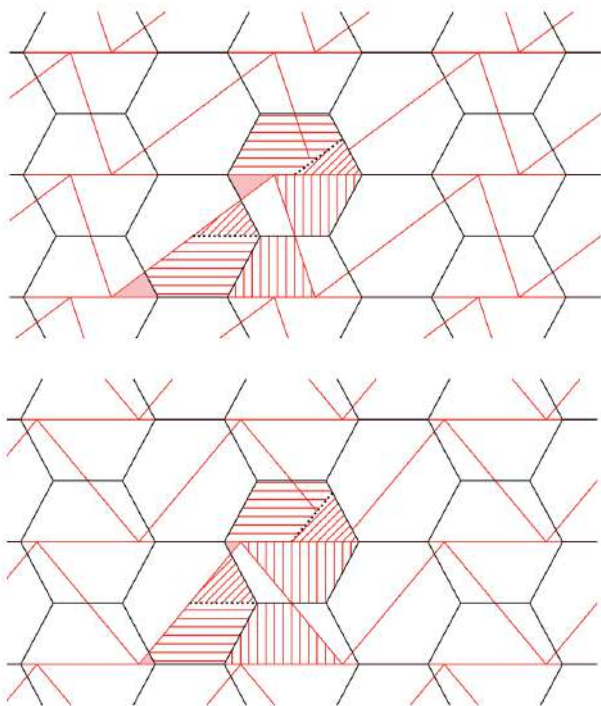


Figura 6. Dissecções com hexágonos.

ra do triângulo, e não só da sua área. Representamos na figura 6 estas dissecções, uma a partir do triângulo inicial e outra a partir de outro triângulo com a mesma área e

a mesma altura, bem como as pavimentações associadas, que se pode ver que não determinam completamente a decomposição.⁸

Se o leitor estiver interessado em conhecer melhor este assunto, aconselhamos-lhe dois livros sobre ele, muito interessantes e recheados de exemplos, de Frederickson.⁹

Breve nota histórica

Sabe-se desde o início do século XIX que *quaisquer* dois polígonos com a mesma área são *equidissectáveis* (Teorema de Wallace – Farkas Bolyai – Gerwien). Este resultado é importante na validação rigorosa da função-área na Geometria Euclidiana.¹⁰

Um passo importante na prova habitual deste teorema é a constatação de que a relação de equidissectibilidade é *transitiva*: se dois polígonos são equidissectáveis a um terceiro polígono então são equidissectáveis entre si. A figura 7, a seguir, sugere a justificação deste passo.

Este exemplo mostra bem como o número de elementos de uma dissecção é variável e como pode crescer neste processo. No entanto, encontrar um pequeno número de elementos, como propôs Dudeney, pode ser essencial e é motivo de investigação contemporânea, na análise de ADN, por exemplo, ou na compressão de dados.

Há um teorema análogo na Geometria Esférica e outro no Plano Hiperbólico (Teorema de [János] Bolyai). Este último está na origem da fundação da Geometria Hiperbó-

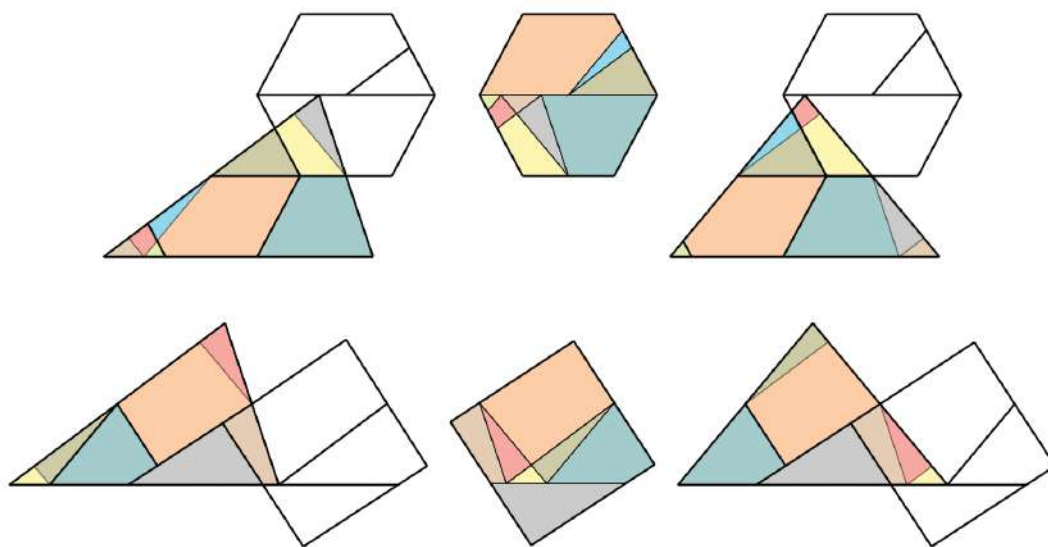


Figura 7. Transitividade da relação de equidissectibilidade.

lica por este autor.¹¹

Note-se ainda que o teorema não é válido se substituírmos polígonos por poliedros e triângulos por tetraedros.

Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente suportado pelo CIDMA (Ref. UIDB/04106) e pelo CMUP (Ref. UIDB/00144), ao abrigo do Programa de Financiamento Plurianual de Unidades de I&D da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, <https://ror.org/00snfqm58>.

SOBRE OS AUTORES

Rui Duarte é Professor Auxiliar na Universidade de Aveiro. Doutorou-se em Matemática na mesma Universidade.

António Guedes de Oliveira é Professor Catedrático aposentado da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Doutorou-se em Matemática na Universidade Técnica de Darmstadt (Alemanha), tendo-se especializado em Combinatória.

TABELA DE PUBLICIDADE 2025

CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DA REVISTA

Periodicidade: Quadrimestral

Tiragem: 1250

Nº de páginas: 64

Formato: 20,2 x 26,6 cm

Distribuição: Regime de circulação qualificada e assinatura

CONDIÇÕES GERAIS:

Reserva de publicidade: Através de uma ordem de publicidade ou outro meio escrito.

Anulação de reservas: Por escrito e com uma antecedência mínima de 30 dias.

Condições de pagamento: 30 dias após a data de lançamento.

CONTACTOS

Tel.: 21 793 97 85

imprensa@spm.pt

ESPECIFICAÇÕES TÉCNICAS:

Ficheiro no formato: TIFF, JPEG, PDF em CMYK

Resolução: 300 dpi (alta resolução)

Margem de corte: 4 mm

LOCALIZAÇÕES ESPECÍFICAS:

Verso capa: 1240€

Contracapa: 1100€

Verso contracapa: 990€

					
	PÁGINA INTEIRA	1/2 PÁGINA	1/4 PÁGINA	1/8 PÁGINA	RODAPE
ÍMPAR	590€	390€	220€	120€	220€
PAR	490€	290€	170€	120€	170€

⁸ Pode o leitor ver que a construção também é iniciada marcando-se a partir do ponto médio E de $\overline{BC}$ um segmento, no caso paralelo à base e de comprimento $\frac{\ell^2+h^2}{8\ell}$, onde ℓ é a base e h a altura de $\triangle ABC$.

⁹ G.N. Frederickson, *Dissections: Plane & Fancy* Cambridge University Press (1997), e G.N. Frederickson, *Hinged Dissections: Swinging and Twisting* Cambridge University Press (2002).

¹⁰ Ver E.G. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley Pub. Co (1974).

¹¹ Curiosamente, János Bolyai era filho de Farkas Bolyai.