



HÉLDER PINTO
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
helder.pinto@piaget.pt

VOLTANDO A DUDENEY: A RECREAÇÃO MATEMÁTICA COMO MOTOR PARA NOVOS AVANÇOS MATEMÁTICOS

Um problema de Henry Dudeney que tem dado que pensar aos matemáticos: Qual é o número mínimo de peças necessárias para cortar um triângulo equilátero e reorganizá-las num quadrado?

O MISTÉRIO MATEMÁTICO DO PROBLEMA DE DUDENEY FOI FINALMENTE DECIFRADO APÓS 120 ANOS

“Em 1907, o matemático britânico Henry Ernest Dudeney propôs um quebra-cabeças agora famoso: Qual é o número mínimo de peças necessárias para cortar um triângulo equilátero e reorganizá-las num quadrado perfeito? [nota do autor: não são todos os quadrados perfeitos? O que é um quadrado imperfeito? Nada como adjetivar para reforçar que o quadrado terá mesmo de ser quadrado...] A solução do próprio Dudeney, revelada poucas semanas depois, exigia quatro peças. No entanto, apesar da elegância do seu método, os matemáticos debateram durante mais de um século sobre se poderia existir uma solução com menos peças. (...) A investigação prova de uma vez por todas que a solução de quatro peças de Dudeney é ótima. Utilizando uma nova abordagem matemática chamada diagramas de correspondência, a equipa excluiu sistematicamente a possibilidade de uma dissecção de duas ou três peças e demonstrou que nenhum arranjo de três ou menos peças poderia transformar com sucesso um triângulo equilátero num quadrado sem inverter as peças – uma restrição importante na solução original de Dudeney.” [1]

Por vezes, existem problemas que parecem muito simples na sua formulação, mas que conduzem a desenvol-

vimentos matemáticos que vão muito além do problema original. Quem não se lembra, por exemplo, do célebre Último Teorema de Fermat (1637), cuja demonstração durou vários séculos, sendo apenas resolvida no final do século XX, envolvendo conceitos matemáticos que eram completamente desconhecidos no tempo da sua formulação? Um outro exemplo é a Teoria de Grafos, que nasce dum problema recreativo colocado (e resolvido) por Euler em 1736; o mesmo aconteceu até com a própria Estatística, que nasce, em parte, com o estudo dos jogos de azar.

Na notícia reproduzida acima temos um destes casos, onde um problema de muito simples formulação tem conduzido a várias investigações, não no sentido de encontrar uma solução (pois o próprio Dudeney indicou uma solução correta), mas no sentido de determinar se não existe uma solução melhor, envolvendo a partição do triângulo equilátero em menos peças. Como é bem conhecido, problemas de otimização nem sempre são fáceis de atacar... Veja-se o exemplo do famoso Teorema das 4 cores (onde se mostra que é possível pintar um mapa plano com apenas quatro cores, de tal modo que nenhuns dois países vizinhos tenham a mesma cor), cuja demonstração também se mostrou muito difícil de completar (apenas em 1976, usando várias horas de trabalho computacional).

Agora que sabe que a solução ótima envolve quatro peças, consegue o leitor resolver o problema proposto por Dudeney?

Aproveitando que estamos a deter-nos sobre este fa-

moso autor, vejamos mais alguns problemas do seu célebre livro *Os Enigmas de Canterbury* [2]. Refira-se que todos os problemas de Dudeney possuem sempre uma história associada, algumas vezes, bastante elaborada e intrincada. Por exemplo, o problema anterior do triângulo equilátero é apresentado neste livro como um problema envolvendo um merceeiro e peregrinos ([2], pp. 56-57).

25. O ENIGMA DO MERCEEIRO

Fizeram-se muitas tentativas, por muito tempo infrutíferas, para convencer o Merceeiro que tinha de propor um enigma de qualquer tipo. Por fim, numa das paragens dos peregrinos, disse que lhes apresentaria algo que «lhes iria dar cabo da cabeça».

De facto, estava a pregar-lhes uma partida, pois ele ignorava se existia uma resposta para o enigma que lhes apresentava. Mostrou um pedaço de tecido em forma de triângulo equilátero perfeito, como se vê na ilustração, e disse: «Algum de vós é destro no corte de tecido? Estimo que não. Cada homem com o seu ofício, e o estudioso pode aprender do laçao, e o sábio do nêscio. Mostrem-me, pois, se conseguem, de que maneira se pode cortar este pedaço de tecido em quatro peças, para que se possam reunir e formar um quadrado perfeito.»

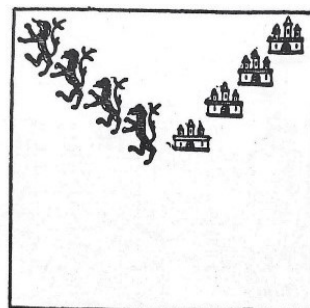


Neste enigma, Dudeney acrescenta ainda mais um parágrafo à história apresentada, onde relata que o merceeiro “salva-se por pouco de uma sova”, pois não sabia resolver o enigma que propôs aos peregrinos... Propor problemas de matemática pode ser perigoso! (Por isso, Dudeney avisou desde logo os seus leitores que ele sabia resolver o problema.)

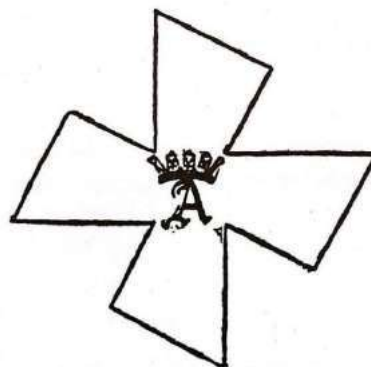
Propomos agora ao leitor alguns outros problemas do mesmo tipo (versão simplificada, sem a história associada):

- O Enigma do Tecelão ([2], p. 41): Como particionar a peça quadrada abaixo em quatro partes iguais de

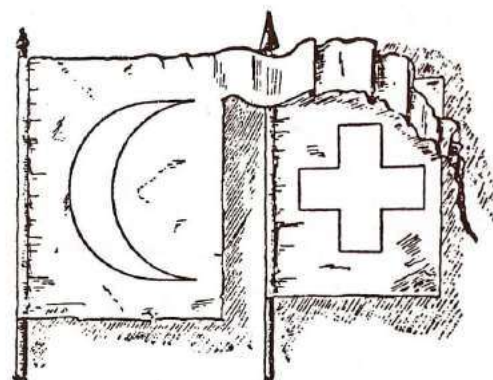
modo que cada uma delas contenha exatamente um leão e um castelo?



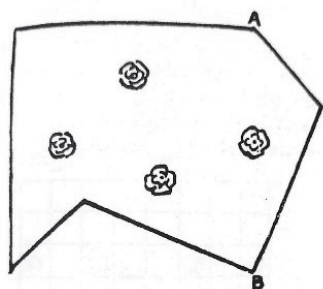
- O Enigma da Abadessa ([2], p. 48): Como particionar a peça abaixo em quatro partes, de modo que, reorganizando as peças, se construa um quadrado?



- A Meia-lua e a Cruz ([2], p. 74): Como particionar a lua da figura abaixo de modo a construir a cruz da bandeira à direita? (Nota: a bandeira é igual nas duas faces, pelo que as peças se podem reverter se necessário; como se depreende da figura, a história de Dudeney envolvia cavaleiros na Terra Santa, no tempo das cruzadas.)



- **Fazer uma Bandeira** ([2], p. 147): Dividir o pedaço de tecido representado a seguir em duas peças, de modo a construir uma bandeira quadrada, onde as rosas sejam colocadas simetricamente. (Nota: não é possível cortar as rosas, nem usar o tecido do avesso; pode não parecer pela figura, mas todas as linhas são retas e o vértice superior esquerdo e o vértice B são retos.)



Deixo ainda uma nota pessoal para o facto de eu nunca ter gostado deste tipo de desafios de transformação de uma imagem noutra, pois tenho sempre muita dificuldade em perceber, sequer como fazer, alguma tentativa que faça sentido. Por exemplo, como particiono a meia-lua de modo a deixar de ter linhas curvas? De facto, Dudeney deixa a sugestão de se começar por transformar a meia-lua num quadrado (cortando-a em quatro peças), antes de se avançar para o problema da cruz.

Uma última nota para o facto de Dudeney, neste livro, também apresentar o seu próprio problema de pontes – o Enigma do Pároco ([2], pp. 54-55) – muito similar ao de Euler:



“Observem que na ramificação do rio há uma ilha. Sobre essa ilha ergue-se a minha pobre casa paroquial, e todos vocês podem ver os arredores da igreja da povoação. Vejam bem, também, que só existem oito pontes, e não mais, que atravessam o rio na minha paróquia. A caminho

da igreja, costumo visitar várias pessoas do meu rebanho, e ao fazer isso atravesso todas e cada uma das pontes, uma e uma só vez. Algum de vós consegue encontrar o caminho que desta maneira percorro, de casa para a igreja, sem sair da paróquia?”

E ainda se deixa um aviso aos potenciais engraçadinhos... : “Não, não, meus amigos. Nunca atravesso um rio num bote, nem a nado, não o passo a vau, não vou por baixo de terra como a toupeira, nem voou pelo ar como a águia; só atravesso as pontes.”

Qual a solução deste enigma das pontes?

A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS:

1. O que eu me irrito com filmes que têm viagens no tempo!

“O paradoxo do avô é possível? Matemático italiano sugere solução para hipótese de viagem no tempo. (...) O paradoxo do avô, que foi popularizado em histórias de ficção científica no século XX, faz um ensaio sobre um viajante do tempo que altera eventos do passado que impediriam a sua própria existência. Um exemplo clássico é o de alguém que volta no tempo e impede o casamento de seus avós, gerando uma contradição lógica: se o viajante não nasceu, como poderia ter voltado no tempo? Gavassino explica que a solução para esse enigma está nas leis físicas que regem o comportamento da matéria e da energia. Assim, o matemático explora os chamados CTCs (closed timelike curves, ou curvas temporais fechadas), um conceito da física que admite a possibilidade de trajetórias que retornam ao ponto de partida no espaço-tempo. Segundo ele, a segunda lei da termodinâmica impede que contradições persistam, exigindo que todas as ações realizadas durante a viagem sejam revertidas. Isso inclui o apagamento completo de memórias do viajante ao final do loop.” [3]

Os negritos acima são meus; ora aqui está uma solução que dá cabo de todos os argumentos de filmes que envolvem viagens no tempo... Segundo este matemático, todas as ações realizadas numa viagem temporal são revertidas, isto é, no regresso ao presente, teríamos tudo exatamente como estava e nada seria alterado... (Não adianta voltarmos atrás no tempo e assassinar Hitler antes da sua subida ao poder!) E pior, numa viagem de ida e volta ao futuro, nem os números futuros do Euromilhões saberíamos depois da nossa viagem (se assim for, as viagens no tempo acabam

por ser completamente inúteis e mais vale gastar as nossas energias para melhorar o nosso presente!). O que se perde nos enredos cinematográficos ganho eu em não me enervar com as evidentes contradições deste tipo de filmes!

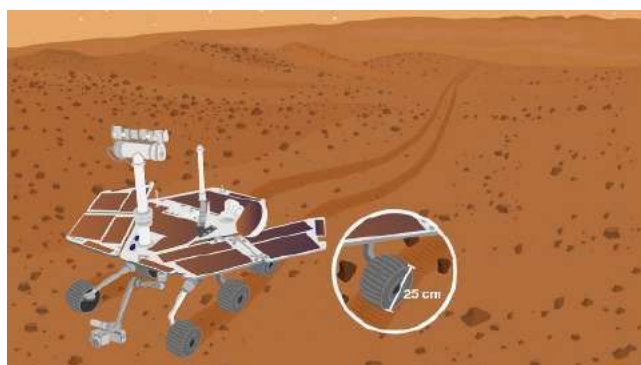
Uma observação ainda para o facto de a notícia acima ter sido escrita por IA e não por um jornalista real. De facto, temos de pensar muito bem, enquanto sociedade, no impacto que a IA está, e vai continuar, a ter nas nossas vidas e quais as consequências, por exemplo, éticas, que tudo isto irá ter na nossa sociedade.

2. O dia do Pi para a NASA

"You may already know all about the mathematical constant pi (π) and how it can be used to calculate things like the circumference of a circle or the volume of a sphere. But did you know pi is also used all the time by NASA scientists and engineers to explore other planets? In this challenge, you can solve some of the same problems NASA scientists and engineers do using pi!" [4]

Março é o Mês da Matemática, tendo havido eventos comemorativos em vários pontos do mundo (e em Portugal também). No site da NASA, a agência norte-americana para a investigação espacial, podem encontrar-se variados módulos/projetos matemáticos, muito interessantes, envolvendo o Pi sempre no contexto das atividades desta agência (estrelas, planetas, órbitas, naves, forças gravíticas, etc.). Um dos mais simples é o seguinte problema (traduzido do original):

A Maratona em Marte. O Mars Exploration Rover *Opportunity* está a conduzir no Planeta Vermelho há mais de 11 anos – nada mau para uma missão planeada para durar apenas três meses! O *Opportunity* já bateu o recorde de distância de condução fora da Terra, que era de 39 quilómetros, e está a aproximar-se da distância de uma maratona: 42,195 quilómetros.



Quando o *Opportunity* atingir a marca da maratona, quantas vezes terão rodado as suas rodas de 25 centímetros de diâmetro? (Nota nossa: está a partir-se do princípio, claro, de que não houve, em momento algum, derrapagem das rodas do pequeno veículo da NASA.)

3. Promoções no Dia do Pi

"March 14 is commonly referred to as Pi Day, a day that aims to celebrate the ratio of the circumference of a circle (...). While the day is popular in math circles, it is also a day for those looking to score great deals on actual pie, pizza pie and other circular treats." [5]

Pelos vistos, o Dia do Pi está a deixar a matemática para se tornar mais um dia especial temático para certas empresas, especialmente pizzerias, fazerem promoções (Dia do Pai, Dia da Mãe, Dia dos Namorados, Halloween, Black Friday... Já se torna difícil acompanhar tanto dia para comprarmos coisas!...). Será que esta moda comercial do Dia do Pi também já chegou a Portugal (eu, pelo menos, não encontrei nenhuma destas promoções "circulares")?



Em [6] pode ainda observar-se um curioso vídeo, usando as bordas externas de uma pizza, dispostas em linha reta nos diâmetros de outras quatro pizzas, "provando" que o perímetro é um pouco maior do que três diâmetros. E também se usa muitas vezes as pizzas para ensinar frações! Parece que, afinal, as pizzas e a matemática têm muito para partilhar entre si.



SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR:

Considerem-se as seguintes duas jornadas.

Jornada 1				
Leça do Balio	2	-	4	New Team
Infesta	2	-	3	Padroense
Salgueiros	2	-	0	Coimbrões
Panther Force	3	-	0	Serzedo
Jornada 2				
New Team	2	-	4	Infesta
Padroense	0	-	4	Salgueiros
Coimbrões	0	-	0	Panther Force
Serzedo	10	-	1	Benfica VN Gaia

Se a transitividade fosse válida, teríamos o seguinte:

Salgueiros > Coimbrões = Panther Force > Serzedo > Benfica VNG;

Salgueiros > Padroense > Infesta > New Team > Leça do Balio.

Logo, conclui-se que o Salgueiros é melhor do que todas as outras oito equipas e, portanto, será o vencedor do campeonato. As restantes posições ainda não podem ser determinadas, pois, por exemplo, ainda não é possível comparar qualquer uma das equipas de cima com qualquer uma das equipas de baixo e vice-versa (exceto o Salgueiros, claro). Isto é, por exemplo, apenas conseguimos indicar que o Padroense estará entre o 2.º e o 6.º lugares, e não mais do que isso, pois este clube ainda pode ser pior, ou não, do que Coimbrões, Panther Force, Serzedo e Benfica VNG.

Em relação à questão de como podemos comparar equipas com número diferente de jogos, a solução que propomos é usar o número de pontos perdidos por cada equipa (pois esses nunca mais podem ser recuperados).

	P	J	V	E	D
1  AD Grijó	33	11	11	0	0
2  Valadares Gaia	30	11	10	0	1
3  SC Arcozelo B	24	12	8	0	4
4  Serzedo	23	11	7	2	2
5  FC Pedroso	23	12	7	2	3
6  Avintes	17	12	5	2	5
7  CD Candal	15	11	5	0	6

Deste modo, a tabela anterior ficaria assim ordenada:

Posição	Clube	Pontos perdidos	Média de pontos
1	Grijó	0	3
2	Valadares	3	2,73
3	Serzedo	10	2,09
4	Arcozelo	12	2
5	Pedroso	13	1,92
6	Candal	18	1,36
7	Avintes	19	1,42

Poderia pensar-se que a média de pontos por jogo seria uma boa medida para ordenar os clubes, mas não é assim. Observem-se os casos do Avintes e do Candal: o Candal está em melhor situação, pois pode ainda ultrapassar o Avintes se ganhar o seu jogo em atraso, apesar de ainda ter pior média de pontos por jogo (ver coluna mais à direita da tabela acima).

Deixamos a seguir as soluções dos desafios de Mariano Mataix, propostos no último número:

1. O Quebrantahuesos ganhou 2-0 à Unión Deportiva.
2. O erro está no h dos golos sofridos pela equipa A, que devia ser r , cujo valor é 5.

Até ao próximo número do nosso Recreio!

[1] n.d., ZAP.aeiou, 14 de março de 2025; <https://zap.aeiou.pt/misterio-matematico-dudeney-decifrado-665568>

[2] Dudeney, H. (2008). *Os Enigmas de Canterbury*. RBA.

[3] nIA Bot (Ferramenta de inteligência artificial), Exame, 9 de janeiro de 2025; <https://exame.com/tecnologia/o-paradoxo-do-avo-e-possivel-matematico-italiano-sugere-solucao-para-teoria-de-viagem-no-tempo>

[4] NASA, fevereiro de 2025; <https://www.jpl.nasa.gov/edu/resources/project/the-nasa-pi-day-challenge>

[5] Gabe Hauari, USA Today, 13 de março de 2025; <https://eu.usatoday.com/story/money/food/2025/03/13/national-pi-day-2025-deals-freebies/82231034007>

[6] <https://www.facebook.com/reel/355773433000502>