



LUÍS L. FERRÁS
Centro de Matemática
da Universidade do
Minho e Centro
de Estudos de
Fenómenos de
Transporte, Faculdade
de Engenharia,
Universidade do Porto
lferras@fe.up.pt

MATEMÁTICA EM MOVIMENTO: PREVER O ESCOAMENTO DE FLUIDOS PARA REVOLUCIONAR A INDÚSTRIA DOS MATERIAIS

A indústria portuguesa de plásticos conta com cerca de 1150 empresas e 8000 milhões de euros de volume de negócios, representando cerca de 4% do Produto Interno Bruto. Porém, segundo a ONU, a cada minuto é atirado para os oceanos do nosso planeta o equivalente a um camião de lixo de plástico. Por um lado, o plástico é um bem necessário, mas, por outro, gera muita poluição. Este problema pode ser mitigado evitando o desperdício de matéria-prima aquando da elaboração de um novo produto, e através da reciclagem e do uso de novos materiais. O objetivo deste trabalho é mostrar como a matemática pode ajudar a reduzir esse desperdício de plástico.

1. INTRODUÇÃO

A indústria portuguesa de plásticos é um setor robusto, composto por cerca de 1150 empresas que geram aproximadamente 8000 milhões de euros em volume de negócios, contribuindo com cerca de 4% para o Produto Interno Bruto (PIB) nacional. Este setor desempenha um papel essencial na economia e fornece uma ampla gama de produtos, desde embalagens e materiais de construção até peças fundamentais para a indústria automóvel e eletrodomésticos. Contudo, o impacto ambiental associado ao plástico representa um dos maiores desafios da nossa era [1].

Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), o plástico continua a ser uma das maiores fontes de poluição marinha, com estimativas alarmantes que indicam que, a cada minuto, uma quantidade equivalente a um camião de lixo cheio de plástico é despejada nos oceanos do planeta. Este material, embora essencial e versátil, é fre-

quentemente descartado de forma inadequada, causando danos graves aos ecossistemas marinhos e contribuindo para a degradação ambiental.

Para abordar esta questão, é crucial adotar práticas de produção mais sustentáveis que permitam reduzir o desperdício de matérias-primas e melhorar a eficiência no uso do plástico. Além disso, a implementação de estratégias de reciclagem e a aposta em novos materiais biodegradáveis ou de origem sustentável são fundamentais para minimizar o impacto ambiental.

Este trabalho pretende demonstrar como a matemática pode ser uma aliada poderosa nesta missão. Através de modelos matemáticos aplicados à dinâmica dos fluidos, podemos prever e otimizar o comportamento do escoamento de polímeros durante a produção, evitando desperdícios significativos de material [2]. Estes modelos

matemáticos permitem aos engenheiros ajustar os processos de fabricação de modo a utilizar apenas a quantidade necessária de matéria-prima, contribuindo assim para uma produção mais eficiente e sustentável.

2. MODELOS MATEMÁTICOS E METODOLOGIAS

As equações de Navier-Stokes são um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o movimento de fluidos viscosos. Estas equações permitem modelar o comportamento de fluidos em diferentes condições e são essenciais para a análise de problemas de dinâmica dos fluidos. A sua aplicação abrange desde o escoamento de água em rios e oceanos até à modelação do ar em torno de aeronaves e automóveis.

As equações de Navier-Stokes baseiam-se em dois princípios fundamentais da física:

- ▶ **Conservação da Massa:** A massa do fluido deve permanecer constante ao longo do tempo, o que é representado pela *equação da continuidade*.
- ▶ **Balço da Quantidade de Movimento:** A taxa de variação da quantidade de movimento é igual à soma das forças aplicadas, o que é representado pela *equação de quantidade de movimento*.

Para um fluido incompressível, as equações de Navier-Stokes podem ser expressas como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{u} representa o vetor velocidade do fluido, t é o tempo, ρ é a densidade do fluido (constante num fluido incompressível), p é a pressão, ν é a viscosidade cinemática do fluido ($\nu = \eta/\rho$ com η a viscosidade dinâmica) e \mathbf{f} representa forças externas, como por exemplo a gravidade. O vetor velocidade e o campo escalar de pressões dependem do tempo e das coordenadas espaciais (x, y, z). O operador ∇ representa o vetor gradiente, que é dado por $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$.

A equação (2.1) é a **equação da continuidade**, que garante a conservação da massa (o divergente da velocidade é nulo). A equação (2.2) é a **equação de quantidade de movimento**, que descreve a dinâmica do fluido sob a in-

fluência de forças internas e externas. A equação da quantidade de movimento pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}, \quad (2.3)$$

onde se usa o conceito de tensão, σ , definido como a força exercida numa partícula de fluido por unidade de área. Para o caso simplificado em que temos o escoamento de um fluido newtoniano (por exemplo, água) entre duas placas paralelas (em que a placa superior se move com velocidade constante U na direção positiva de x), a relação obtida para a tensão é que esta é proporcional à variação da velocidade no sentido perpendicular à direção do escoamento (y), tal como ilustrado na figura 1. A constante de proporcionalidade é então dada pela viscosidade (η), que mede a resistência de movimento do fluido.

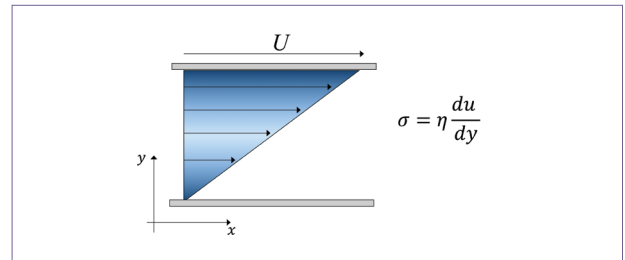


Figura 1. Escoamento entre placas paralelas. A placa superior move-se com velocidade constante e vai arrastando o fluido (representado a azul), devido à viscosidade entre as diferentes camadas do fluido. Este perfil linear de velocidade é obtido porque é assumida uma distância *muito pequena* entre as placas superior e inferior. A relação $\sigma = \eta \frac{du}{dy}$ é conhecida como a lei de Newton da viscosidade.

2.1 Fluidos complexos

As equações de Navier-Stokes são utilizadas para modelar uma ampla variedade de escoamentos de fluidos. Porém, alguns fluidos mostram um comportamento mais complexo, no qual, além de viscosidade, também é possível observar elasticidade, resultando em viscoelasticidade. Para modelar essa viscoelasticidade, é assumido que o fluido se comporta como uma mola (parte elástica) e um amortecedor (parte viscosa) em série, tal como ilustrado na parte superior da figura 2.

Podemos ver que, na parte superior da figura, temos do lado esquerdo umas mãos a esticarem uma mola. Então, a tensão sentida nas mãos (σ) é proporcional à deformação elástica da mola (γ_e), ou seja, quanto mais esticarmos a mola, maior a tensão sentida (Lei de Hooke). No centro

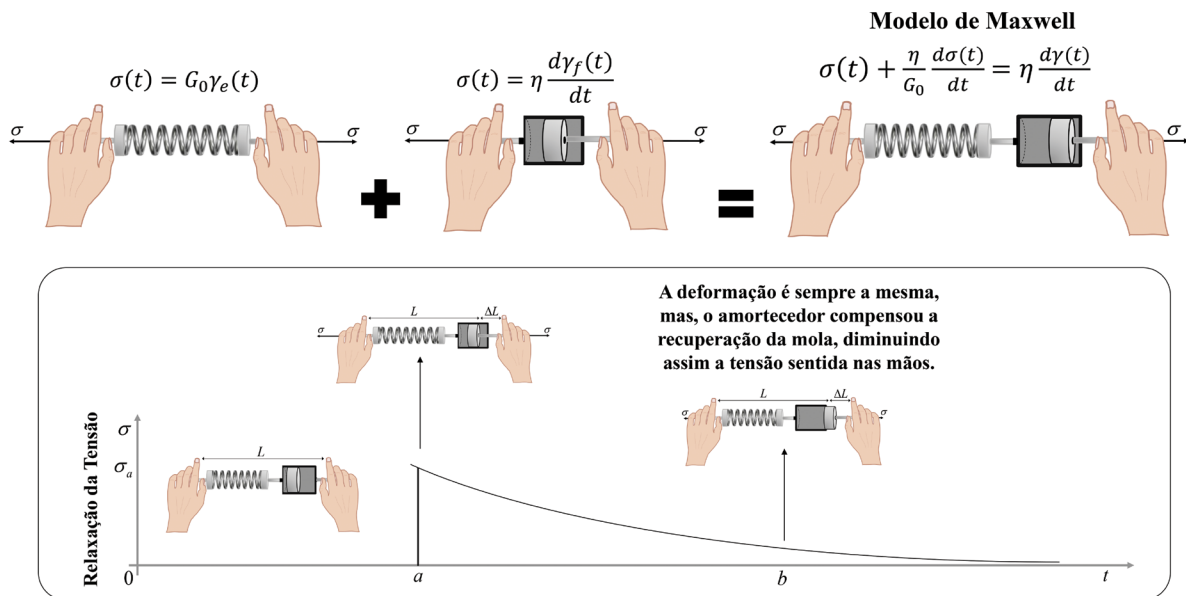


Figura 2. Na parte superior da figura encontra-se uma representação mecânica (modelo de Maxwell) de um fluido viscoelástico: uma mola (representando a componente elástica, com a tensão dada por $\sigma(t) = G_0 \gamma_e(t)$, onde a tensão é proporcional à deformação) e um amortecedor (representando a componente viscosa, com a tensão dada por $\sigma(t) = \eta \frac{d\gamma_f(t)}{dt}$, onde a tensão é proporcional à taxa de deformação) dispostos em série. O modelo de Maxwell pode ser obtido assumindo que a deformação total ($\gamma(t)$) resulta da soma das deformações elásticas ($\gamma_e(t)$) e viscosa ($\gamma_f(t)$). A parte inferior da figura ilustra um caso em que uma deformação constante ΔL é aplicada no instante $t = a$. Observa-se que, a partir desse momento, a tensão *sentida* nas mãos diminui, pois o deslocamento do êmbolo dentro do amortecedor compensa a recuperação da mola ao seu estado inicial.

da figura (parte superior), temos um amortecedor, que representa o comportamento newtoniano observado na figura 1, e que modela bem fluidos viscosos. Para fluidos newtonianos, a tensão é proporcional, não à deformação, mas sim à variação instantânea da deformação do fluido ($d\gamma_f/dt$). Isto significa que quanto mais rápido se puxar as extremidades do amortecedor, mais difícil será fazer esse movimento, ou seja, maior a tensão sentida nas mãos.

O modelo viscoelástico mais simples é então dado pela soma das duas deformações (elástica, γ_e , e do fluido, γ_f), resultando num modelo misto que combina uma mola ligada ao amortecedor, e que tem o nome de modelo de Maxwell (canto superior direito da figura 2). A parte inferior da figura 2 ilustra o caso em que uma deformação constante ΔL é aplicada no instante $t = a$. Observa-se que, a partir desse momento, a tensão *sentida* nas mãos diminui, pois o deslocamento do êmbolo dentro do amortecedor compensa a recuperação da mola ao seu estado inicial.

Estes conceitos de viscosidade e elasticidade são importantes para se perceber o comportamento de certos

fluidos. A viscosidade descreve a resistência de um fluido ao escoamento, ou seja, quanto maior a viscosidade, maior é a força necessária para gerar um determinado escoamento. Se compararmos, por exemplo, o mel com água, onde o mel tem a viscosidade mais alta dos dois, é fácil perceber que o mel não flui tão facilmente como a água. Ser viscoelástico significa que o material, em certa medida, se comporta tanto como um líquido quanto como um sólido e apresenta uma deformação dependente do tempo (existe um determinado tempo de relaxação) [3]. Por exemplo, o mel é mais elástico do que a água (que não possui elasticidade).

2.2 Solução das equações de Navier-Stokes

Para descrever matematicamente fluidos viscoelásticos, temos de resolver as equações (2.1) e (2.3), adicionando a este sistema uma variante do modelo de Maxwell apresentado na figura 2 (canto superior direito).

Porém, a resolução deste sistema de equações apresen-

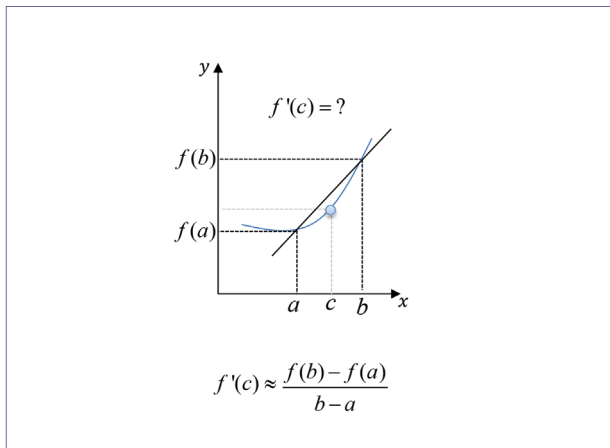
ta um desafio significativo devido à sua complexidade e ao facto de ser um sistema altamente não linear, o que torna difícil a obtenção de soluções analíticas na maioria dos casos de interesse. Consequentemente, recorre-se frequentemente à **simulação numérica** (Mecânica dos Fluidos Computacional ou *Computational Fluid Dynamics – CFD*), que permite obter soluções aproximadas através de métodos computacionais e da aproximação de derivadas. Em vez de determinarmos a solução (ou o comportamento do fluido) de forma contínua em todos os pontos do espaço e do tempo, obtemos apenas o comportamento (aproximado) em pontos discretos do domínio, dependendo do método numérico utilizado.

A ideia básica por trás da solução numérica consiste

no uso de aproximações para calcular as diferentes derivadas, como ilustrado na figura 3. Nesta figura, a derivada de uma função genérica f no ponto $x = c$, representada por $f'(c)$, pode ser aproximada por um quociente, em que o numerador contém valores discretos da função f e o denominador apresenta valores discretos de x .

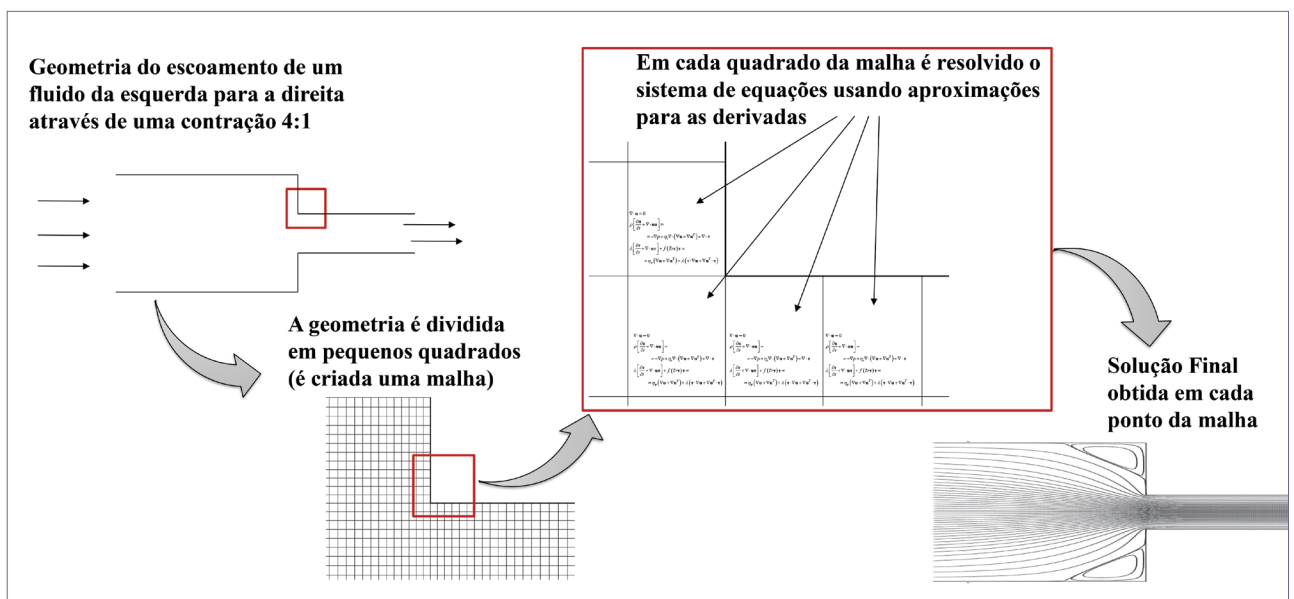
Na figura 4 é ilustrado o processo de resolução numérica para um escoamento através de uma contração 4:1 (um canal 2D onde a largura da saída é quatro vezes menor do que a da entrada). De realçar que o método numérico usado foi o Método dos Volumes Finitos [4].

A vantagem destas simulações numéricas é que permitem prever o comportamento do fluido em qualquer ponto da geometria, desde que o modelo (sistema de equa-



◀ Figura 3. Exemplo de aproximação de uma derivada.

▼ Figura 4. Esquema ilustrativo do processo de resolução das equações que governam o escoamento de fluidos viscoelásticos. Primeiro, define-se a geometria onde se pretende resolver o sistema, impondo as condições de fronteira e iniciais. O segundo passo consiste na criação de uma malha. Em seguida, procede-se à discretização das equações governativas ((2.1), (2.3) e modelo constitutivo), aproximando as derivadas por valores pontuais da variável em estudo. Esta discretização resulta num sistema algébrico de equações que, após ser resolvido, permite obter os campos de velocidade, tensão e pressão. Nesta figura, são apresentadas apenas as linhas de fluxo do fluido como solução final.



ções diferenciais) esteja bem ajustado ao fluido em estudo. O ajuste do modelo é feito através de alterações nos parâmetros que caracterizam o fluido viscoelástico, como por exemplo a densidade, a viscosidade e o tempo de relaxação (sendo esses parâmetros obtidos experimentalmente usando uma pequena amostra do fluido e aparelhos específicos para fazerem essas medições).

3. CASO DE ESTUDO

3.1 Aplicação ao processo de extrusão

O processo de extrusão (figura 5) consiste em alimentar a extrusora com grânulos de polímero, que são transportados ao longo do cilindro pela rotação de um parafuso.

As bandas de aquecimento derretem os grânulos, transformando-os em polímero fundido antes de chegarem à feira. A feira, por sua vez, confere ao produto a sua forma final (perfil) [5].

Uma das aplicações das simulações numéricas é a de prever a qualidade final de perfis de plástico (por exemplo, persianas, *deck*, cateteres, entre outros – ver figura 6), produzidos através do processo de extrusão. É importante salientar que o *deck* é um pavimento exterior frequentemente utilizado em jardins ou áreas circundantes de piscinas em habitações. A extrusão de um perfil de *deck* constitui o objeto de estudo deste trabalho.

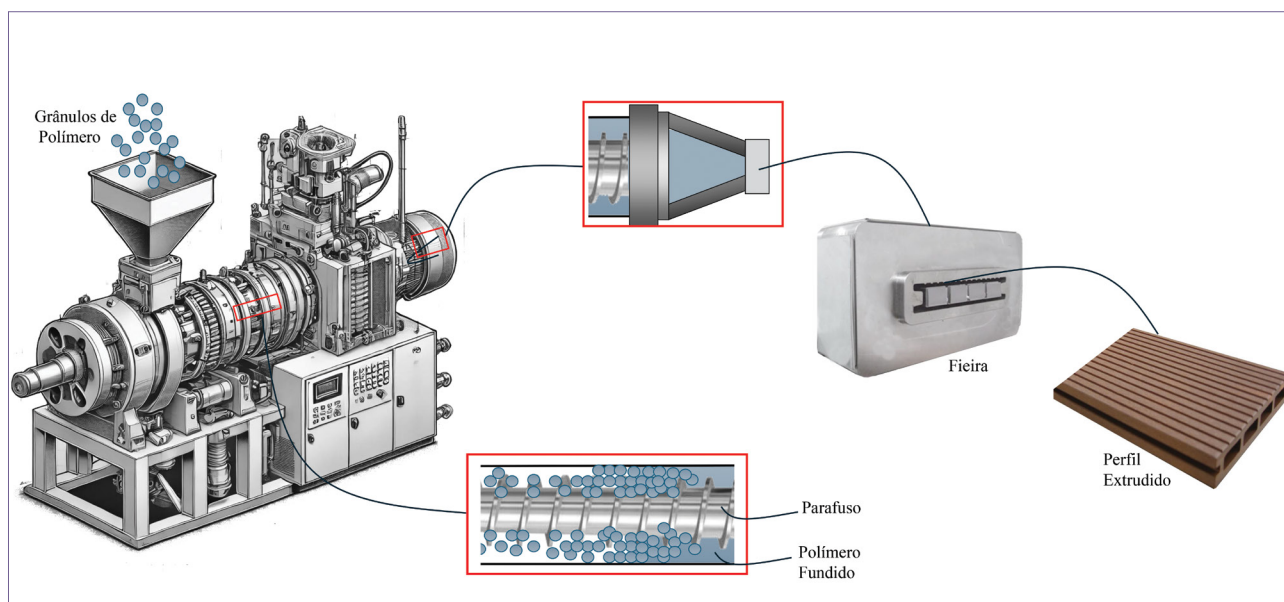


Figura 5. Esquema de funcionamento de uma extrusora.

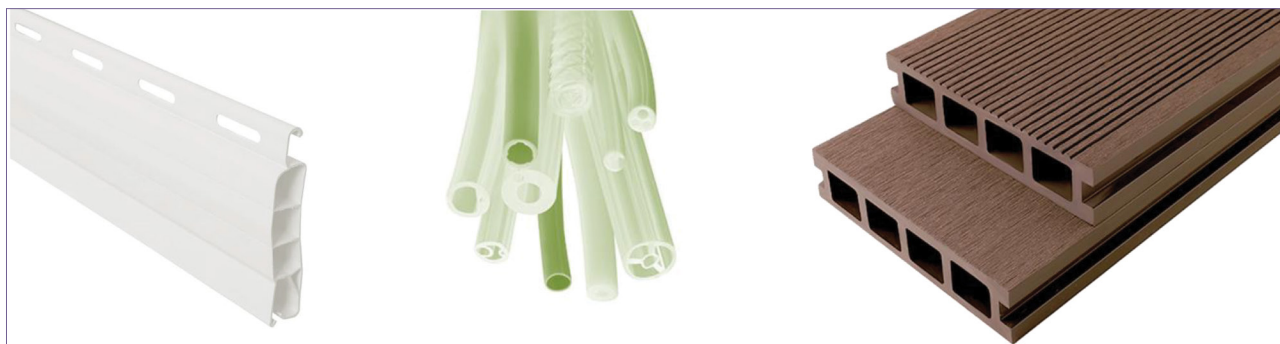


Figura 6. Perfis termoplásticos. Da esquerda para a direita, temos o perfil de uma persiana, o perfil de um cateter (de aplicação médica) e o perfil de *deck*.

3.2 Extrusão de um perfil de *deck* – simulações numéricas

Os fluidos são preguiçosos e tentam sempre mover-se na direção que oferece menor resistência. Por exemplo, tal como ilustrado no caso do escoamento 2D da figura 7 (a), para um caudal fixo imposto na entrada do canal, uma maior quantidade de fluido segue para o canal inferior (saída **B**), pois tem mais espaço entre as paredes (o fluido encontra menos resistência nessa região).

Esta característica dos fluidos é um problema grave quando se pretende produzir um perfil com diferentes espessuras, tal como ilustrado na figura 7 (b) (lado direito). Como podemos ver, existem partes do perfil sem material (velocidades muito baixas), porque este encontrou muita resistência nessa região (ao longo da feira). Outras regiões do perfil oferecem menos resistência, logo o material passa por essas regiões com velocidade mais elevada, levando a um perfil não homogêneo e com defeitos de fabrico.

Na figura 7 (b) (lado esquerdo), podemos ver o resultado de uma simulação numérica (obtido na saída da feira), que mostra precisamente as diferentes velocidades nos diferentes locais do perfil (velocidades mais elevadas

a vermelho e velocidades mais baixas a azul).

Na prática, o que se faz é encontrar uma forma de enganar o fluido, de modo a que este não consiga descobrir quais as regiões que oferecem menor resistência, e tenha a mesma velocidade em todas as regiões do perfil, aquando da saída da feira. Na figura 8, é ilustrado esse processo para o escoamento 2D da figura 7. Como podemos ver, foi introduzido um obstáculo no canal mais largo (que oferece menos resistência) de modo a obter a mesma velocidade do fluido nas saídas **A** e **B**.

Esta técnica é usada no interior da feira (caso 3D) para se obter um perfil de velocidade homogêneo.

Na indústria, este processo é feito experimentalmente e o seu sucesso depende muito da experiência da pessoa responsável, levando a um intenso processo de tentativa e erro, até que se obtenha o perfil final com as dimensões desejáveis. Neste processo de tentativa e erro, há perda de tempo e desperdício de material, tanto de polímero como do metal utilizado na construção de novas feiras com geometrias diferentes. No caso das simulações numéricas pode haver algum tempo perdido nessas simulações, mas não há desperdício de material.

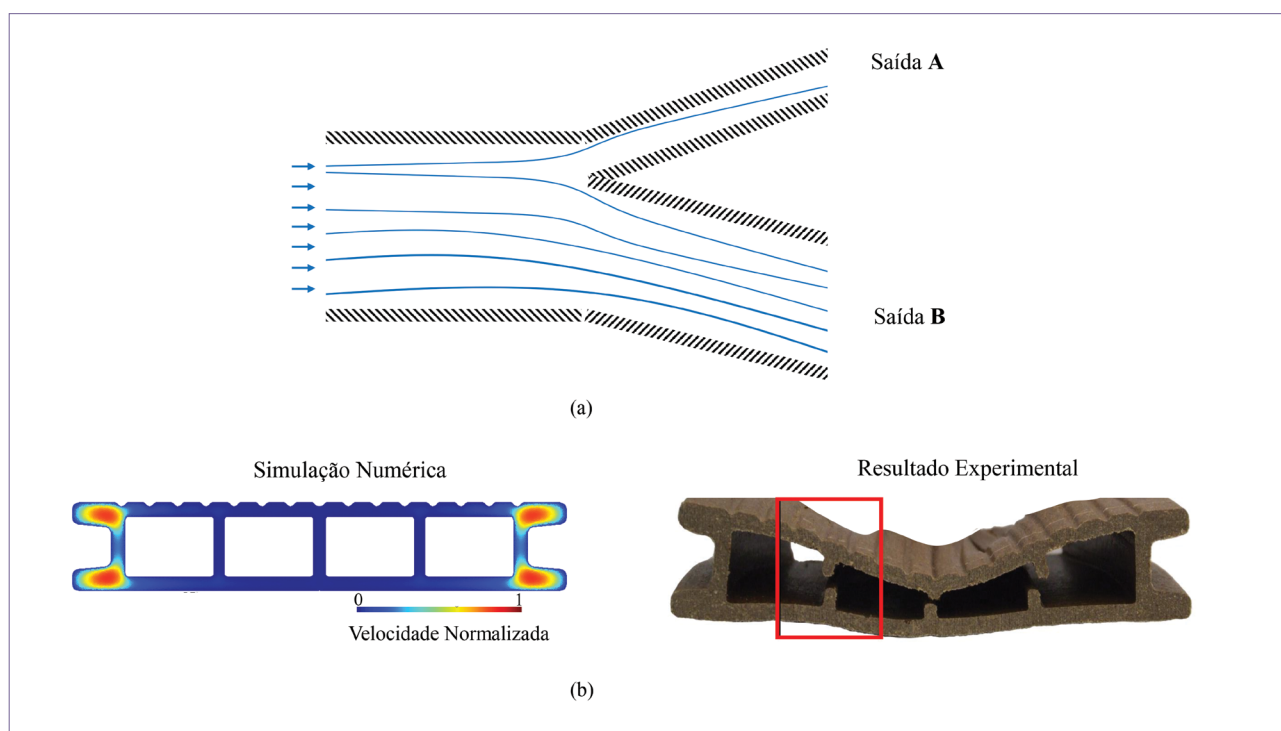


Figura 7. (a) Exemplo de um escoamento 2D onde o fluido tem tendência a deslocar-se para a saída **B** em detrimento da saída **A**, pois a saída **A** oferece mais resistência. (b) Exemplo de uma simulação numérica (resultado obtido na saída da feira) e respetivo resultado experimental.

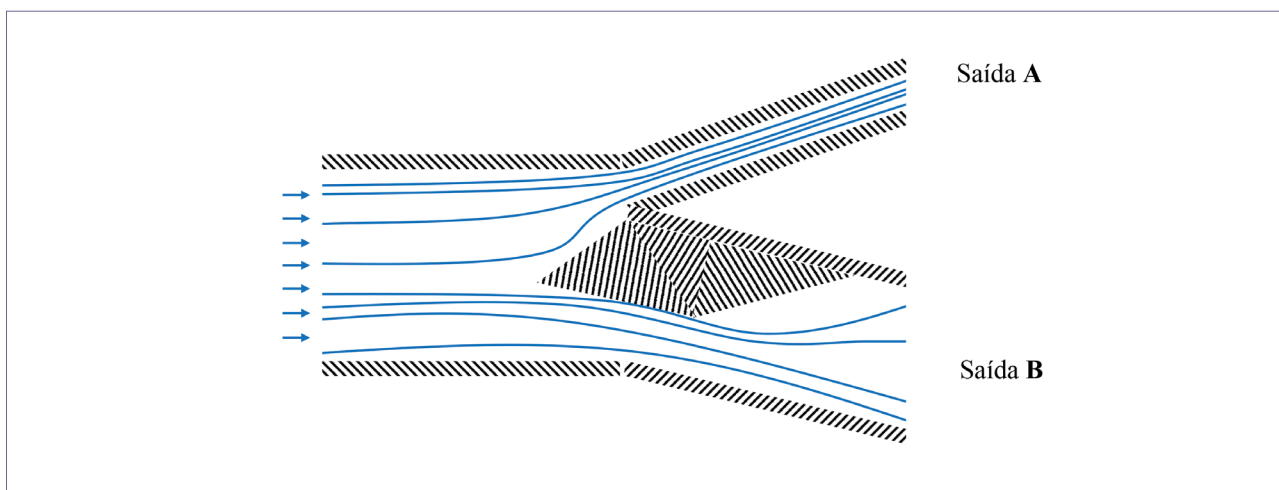


Figura 8. Introdução de um obstáculo no canal mais largo da figura 7, de modo a obter a mesma velocidade do fluido nas saídas A e B.

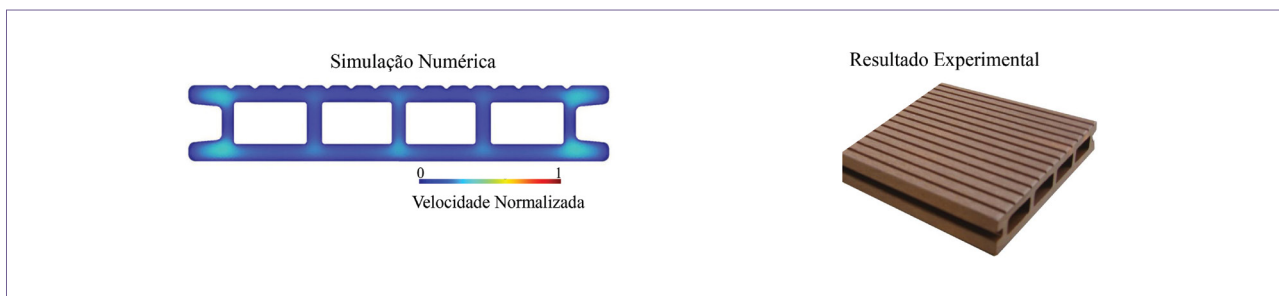


Figura 9. Exemplo de uma simulação numérica (resultado obtido na saída da feira) e respetivo resultado experimental. A distribuição de velocidades é homogênea.

O processo numérico de otimização do perfil de velocidade é conduzido de acordo com as seguintes etapas:

1. Criar uma malha para a geometria no interior da feira, considerando a presença de obstáculos nas regiões com menor resistência;
2. Realizar a simulação numérica e analisar os perfis de velocidade à saída da feira;
3. Calcular a norma da velocidade média obtida e, para cada ponto da malha no perfil de saída, determinar a diferença entre a norma da velocidade nesse ponto e a norma da velocidade média. Somar todas essas diferenças;
4. Verificar se a soma de todas as diferenças é inferior a um valor de tolerância previamente definido pelo utilizador. Se esta condição for satisfeita, o perfil obtido é considerado o perfil final. Caso contrário, retornar ao ponto 1 e ajustar as dimensões dos obstáculos.

Esta metodologia segue também um processo de tentativa e erro, mas não desperdiça material. A metodologia pode ainda ser otimizada através do uso de uma função erro, que indica o caminho a seguir na alteração das dimensões dos obstáculos, através do cálculo do gradiente dessa mesma função erro.

Na figura 9, é mostrado o caso de um perfil de *deck* que foi obtido através da metodologia descrita. Como podemos observar, o perfil não mostra imperfeições, tendo uma distribuição homogênea.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma metodologia numérica para a simulação do escoamento de um polímero fundido durante o processo de extrusão, utilizado na produção de perfis termoplásticos.

O sistema de equações diferenciais a resolver é composto pela equação da continuidade (conservação da massa), pela equação de balanço da quantidade de movimento e por uma equação constitutiva que relaciona tensão e deformação.

Para resolver este sistema não linear de equações diferenciais, utiliza-se o Método dos Volumes Finitos, amplamente reconhecido na simulação de escoamentos de fluidos. Este método é o preferido devido à sua capacidade de garantir a conservação da massa em cada volume de controlo, fator essencial para a precisão das simulações.

A feira, responsável por dar a forma final ao perfil extrudido, define a geometria (parte interna da feira onde passa o polímero fundido) que serve como domínio para a solução do sistema de equações diferenciais. Devido à existência de diferentes espessuras no perfil extrudido, é comum a formação de perfis defeituosos. Alterar a geometria interna da feira (mantendo o perfil de saída inalterado) permite ajustar o fluxo de material nas diferentes regiões da saída.

Por meio de simulações numéricas, é possível obter um perfil de velocidades homogéneo, utilizando uma metodologia baseada no cálculo de uma função de perda, cujo gradiente orienta as modificações necessárias na geometria.

Este processo numérico reduz significativamente o desperdício de materiais, como o metal utilizado na construção da feira e o polímero utilizado no processo de extrusão, substituindo o método experimental de tentativa e erro tradicionalmente adotado na indústria (no processo industrial convencional, cada alteração na geometria da feira pode exigir a fabricação de uma nova peça). Por outro lado, com recurso a simulações numéricas, basta ajustar o domínio da solução e modificar a malha, tornando o processo consideravelmente mais eficiente e sustentável.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT/MCTES (PIDDAC), no âmbito do projeto 2022.06672.PTDC – iMAD – Melhorias na Modelação de Difusão Anómala e Viscoelasticidade: soluções para a indústria e DOI 10.54499/2022.06672.PTDC (<https://doi.org/10.54499/2022.06672.PTDC>).

REFERÊNCIAS

- [1] Rhodes, C. J., "Solving the Plastic Problem: From Cradle to Grave, to Reincarnation". *Science Progress*, 102, 218-248, 2019.
- [2] Gonçalves, N., Teixeira, P., Ferrás, L., Afonso, A., "Innovative Approach to the Design of Profile Extrusion Dies". *Plastics Research Online*, 2015.
- [3] Morrison, F. A., *Understanding Rheology*. Oxford University Press. New York, 2001.
- [4] Moukalled, F., Mangani, L., Darwish, M., *The Finite Volume Method*. Springer International Publishing. 2016.
- [5] Lafleur, P. G., Vergnes, B. (eds.), *Polymer Extrusion*. John Wiley & Sons. 2014.

SOBRE O AUTOR

Luís Ferrás é professor auxiliar no departamento de Engenharia Mecânica (Secção de Matemática) da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. É ainda membro colaborador do Centro de Matemática da Universidade do Minho e membro integrado do Centro de Estudos de Fenómenos de Transporte da Universidade do Porto. As suas áreas de investigação são Análise Numérica (métodos numéricos para equações integro-diferenciais), Modelação Matemática (escoamentos viscoelásticos complexos e difusão anómala) e Machine Learning (equações diferenciais neuronais).

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação pt-maths-in@spm.pt