José Carlos Santos
Universidade
do Porto
*jcsantos@fc.up.pt*

# UMA INFINIDADE DE NOVAS FÓRMULAS PARA π

**Recentemente, dois físicos indianos descobriram uma fórmula nova para π. De facto, descobriram uma quantidade infinita delas. Iremos ver de que é que isto se trata.**

O número $\pi$ é um dos tópicos matemáticos que mais interesse geram. E também é daqueles que são estudados há mais tempo. Sendo assim, é difícil que surja uma novidade relativa àquele número e, mais do que isso, uma novidade que se possa explicar facilmente a uma audiência vasta. Mas é exatamente isso o que acabou de acontecer.

Dois físicos indianos, Arnab Priya Saha e Aninda Sinha, publicaram um artigo (veja-se [2]) altamente técnico sobre Teoria das Cordas numa revista científica bastante prestigiada, a *Physical Review Letters*. Obtiveram aí, como subproduto do seu trabalho, uma família de fórmulas para $\pi$ que são uma novidade completa. E uma novidade interessante.

Normalmente, quando se é exposto ao número $\pi$ pela primeira vez, este é definido como sendo o quociente entre o perímetro de uma circunferência e o respetivo diâmetro. Esta definição faz sentido a partir do momento em que uma pessoa se convence de que aquele quociente é o mesmo para todas as circunferências, mas não é prático para obter o valor numérico de $\pi$ com grande precisão. A partir do século XVII, começaram a surgir na Europa (e, ainda antes disso, fora da Europa, como iremos ver) maneiras de representar $\pi$ como soma de séries (ou seja, somas com uma infinidade de parcelas), o que é mais conveniente para o cálculo numérico de $\pi$. A primeira a surgir é geralmente conhecida por série de Leibniz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

cuja soma é $\frac{\pi}{4}$. De facto, embora esta igualdade tenha sido descoberta por Leibniz, já tinha sido descoberta alguns anos antes dele pelo matemático escocês James Gregory e, ainda bastante antes disso, pelo matemático e astrónomo indiano Mādhava de Sangamagrāma.

Mas embora se tenha de facto a igualdade

$$\pi = 4 \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right),$$

isto não é útil para obter valores aproximados de $\pi$. Basta ver que se fizermos o cálculo do membro da direita da igualdade anterior usando os 100 primeiros termos da série, o valor obtido começa por 3,13 enquanto que $\pi$ é aproximadamente 3,14. Comparemos isto com o que fez Newton ainda antes de Leibniz (e de James Gregory). Ele obteve a igualdade[1]:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5 \times 2^5} - \frac{1}{28 \times 2^7} - \frac{1}{72 \times 2^9} - \cdots\right),$$

e bastou-lhe somar (à mão!) os primeiros 22 termos do membro da direita desta igualdade para obter uma aproximação de $\pi$ na qual os primeiros 16 algarismos estão corretos.

Passemos então à fórmula recentemente descoberta, a qual teve algum impacto[2]. Para a compreender é preciso introduzir o símbolo de Pochhammer. Trata-se do seguinte: se $a$ é um número real (ou até complexo) e se $n$ é um inteiro não negativo, então

$$(a)_n = a \times (a+1) \times (a+2) \times \cdots \times (a+n-1)$$

caso $n > 0$; além disso, $(a)_0 = 1$. Por exemplo,

$$(6)_3 = 6 \times (6+1) \times (6+2) = 336.$$

Com isto, podemos enunciar a nova fórmula:

$$\begin{aligned}\pi &= 4 + \left(\frac{1}{1+\lambda} - \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2+\lambda} - \frac{4}{5}\right)\left(\frac{5^2}{4(2+\lambda)} - 2\right)_1 + \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{3+\lambda} - \frac{4}{7}\right)\left(\frac{7^2}{4(3+\lambda)} - 3\right)_2 + \cdots \\ &= 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+\lambda} - \frac{4}{2n+1}\right)\left(\frac{(2n+1)^2}{4(n+\lambda)} - n\right)_{n-1}.\end{aligned}$$

Uma coisa que salta aos olhos imediatamente aqui é a existência de um parâmetro $\lambda$. Que número é este? A resposta é: qualquer número real maior do que $-1$. Até pode ser um número complexo cuja parte real seja maior do que $-1$. Desde que se faça esta restrição, a soma é sempre $\pi$. É por isso que isto não é somente a descoberta de uma nova fórmula para $\pi$; é a descoberta de uma infinidade de novas fórmulas.

De facto, embora infinito não seja um número, até podemos tomar $\lambda = \infty$. Se o fizermos, então

$$\frac{1}{n+\lambda} - \frac{4}{2n+1} = -\frac{4}{2n+1} \quad \text{e} \quad \frac{(2n+1)^2}{4(n+\lambda)} - n = -n,$$

pelo que a fórmula se reduz a

$$\pi = 4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{4}{2n+1}\right)(-n)_{n-1}.$$

Mas

$$\begin{aligned}(-n)_{n-1} &= (-n) \times (-n+1) \times (-n+2) \times \cdots \times (-n+n-1) \\ &= (-1)^{n-1} n!,\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}4 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{4}{2n+1}\right)(-n)_{n-1} &= 4 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \\ &= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.\end{aligned}$$

Ou seja, com $\lambda = \infty$ recupera-se a série de Leibniz (ou, se preferirem, a série de Mādhava)! Como esta foi originalmente descoberta por um matemático indiano e como os autores de [2] são indianos, pode-se ver isto como um regresso às origens. Aliás, parece haver uma tradição histórica por parte dos matemáticos indianos para descobrirem fórmulas ligadas a $\pi$. Um exemplo disto é uma fórmula de Ramanujan (veja-se [1]):

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!^4} \frac{26390n + 1103}{396^{4n}}.$$

Com esta fórmula, podemos obter excelentes aproximações de $\frac{1}{\pi}$ muito rapidamente. Logo a primeira parcela desta soma tem os mesmos sete primeiros algarismos a seguir à vírgula que o número $\frac{1}{\pi}$; com as duas primeiras parcelas, isto sobe para os primeiros 16 algarismos.

Em contrapartida, como já foi referido, a série de Leibniz não tem interesse prático para calcular valores aproximados de $\pi$. E a nova série? Esta já tem; basta escolher $\lambda$ apropriadamente. Se, por exemplo, se tomar $\lambda = 12$, então a soma dos dez primeiros termos da série é igual a $3,1415961\ldots$ e os seis primeiros algarismos deste número são os seis primeiros algarismos de $\pi (\approx 3,1415926)$.

Convém lembrar que esta fórmula se deve a dois físicos teóricos e não a matemáticos. Com efeito, a fórmula surgiu acidentalmente, por assim dizer, como consequência de uma fórmula mais geral obtida num artigo sobre Teoria das Cordas. Os autores *não* estavam à procura de uma fórmula para $\pi$.

Para terminar este artigo, eis a opinião de Aninda Sinha sobre o trabalho que desenvolveu e que levou à fórmula de que é coautor[3]:

> "Fazer este tipo de trabalho, embora talvez não dê origem a uma aplicação imediata à vida do dia-a-dia, fornece o prazer puro de fazer teoria só pelo prazer de a fazer."

## BIBLIOGRAFIA


[1] Srinivasa Ramanujan, "Modular Equations and Approximations to $\pi$", *Quart. J. Math.* **45**, pp. 350–372, 1914

[2] Arnab Priya Saha; Aninda Sinha, "Field Theory Expansions of String Theory Amplitudes", *Physical Review Letters* **132**, 221601, 2024


[1] Rick Wicklin, *How Newton Calculated Pi to 16 Decimal Places*, *https://blogs.sas.com/content/iml/2023/03/08/newton-pi.html*

[2] Bruno Vaiano, *Kurt Gödel: o Filósofo Paranoico que Provou a Incompletude da Matemática*, *https://super.abril.com.br/especiais/os-teoremas-da-incompletude-de-godel*

[3] Ananthapathmanabhan MS, *IISc Physicists Find a New Way to Look at Mathematics' Pi*, *https://kernel.iisc.ac.in/iisc-physicists-find-a-new-way-to-look-at-mathematics-pi/*