Hélder Pinto
Instituto Piaget,
Insight e CIDMA-UA
helder.pinto@ipiaget.pt

O JOGADOR DE TÉNIS QUE NÃO É ASSIM TÃO MAU, MAS QUE PERDE (QUASE) SEMPRE.

Qual é a probabilidade de um determinado jogador vencer um jogo de ténis, sabendo a probabilidade de esse jogador ganhar cada ponto?

Em tempos, jogava ténis todas as semanas com um colega da faculdade e, apesar de não ser "trucidado" (longe disso…), acabava por perder, invariavelmente, quase sempre. Como é que ele ganhava (quase) sempre, se eu ganhava, por exemplo, em média, 40% dos pontos que disputávamos?

Depois de anos com esta dúvida, lá me cruzei com um texto de Ian Stewart [1, pp. 15-30] que abordava exatamente esta temática:

> *"Dennis: how come you always beat me?"*
> *"I'm better than you, old son."*
> *"Yes, but you're not that much better. I've been keeping score and I reckon that I win one-third of the points. But I don't win one-third of the matches!"*

De facto, a conclusão apresentada era a seguinte:

> *"Dennis, if I have a one in three chance of winning each point, I only have a one in seven chance of winning a game! No wonder you always beat me! The rules of tennis amplify differences between players."*

Na realidade, este "*one in seven*" é apenas uma aproximação. Tente determinar o valor exato da probabilidade de o amigo ganhar um jogo de ténis ao Dennis.

E no caso dos meus 40%? Qual a probabilidade de eu ganhar um jogo ao meu colega?

Mas é necessário ganhar seis jogos (pelo menos) para se ganhar um *set*… E pelo menos três *sets* para se ganhar uma partida de ténis (na vertente masculina, dependendo dos torneios)… Se o leitor tiver coragem (e algum tempo livre), tente chegar à conclusão que está indicada a seguir:

> *"Well, according to my calculations, if I have a 1/3 chance of winning a point against you, my chance of winning a match is 0.000000027, or about one in thirty-seven million."*

Nada como a matemática para nos levantar a autoestima desportiva!...

PS: Nestes considerandos, para facilitar, considere que a probabilidade de vencer um ponto é sempre a mesma, independentemente de quem está a servir (o que está longe de ser verdade, embora me pareça que no ténis recreativo amador não seja assim tão descabido).

A MATEMÁTICA NAS NOTÍCIAS

1. Os números aleatórios que guiam as nossas vidas e a a busca para encontrá-los

> *"Mesmo com toda a sua capacidade, existem coisas que os computadores não fazem muito bem. Uma delas é definir números aleatórios.*

Sim, os computadores liberam dados o tempo todo, mas não números aleatórios. Porquê?

Os computadores dependem de mecanismos internos que, em algum nível, são previsíveis. Por isso, os resultados dos algoritmos dos computadores, em algum momento, também se tornam previsíveis – é exatamente o que você não quer que aconteça, quando administra um casino.

O mesmo problema também causa dores de cabeça para os criptógrafos. Quando você criptografa informações, você quer que o código seja o mais aleatório possível, para que ninguém consiga descobrir como você codificou o texto original. Isso impede que as pessoas leiam a mensagem secreta.

Há muito tempo, as pessoas buscam fontes externas de aleatoriedade para servir de base à geração de números aleatórios. E, nesta busca da verdadeira aleatoriedade, elas já examinaram praticamente tudo, em busca de fenômenos caóticos que não possam ser previstos, nem manipulados.

Os pesquisadores já ouviram os ruídos das tempestades elétricas, tiraram fotos de gotas de chuva no vidro e brincaram com as minúsculas partículas do Universo conhecido. E a busca está longe de terminar." [2]

Ora aqui está uma situação que nos parece contraintuitiva, numa época em que a inteligência artificial e a computação parecem não ter limites… Afinal, um computador, por si só, não consegue criar números que sejam totalmente aleatórios!… Coisa que uma criança consegue fazer lançando uma moeda ao ar e observando a face que fica para cima (como matemáticos que somos, consideremos as faces 0 e 1 na moeda, e o sistema de numeração binário), embora permaneça a questão: como decidimos a paragem de lançamentos para que a nossa escolha seja verdadeiramente aleatória?

Embora haja modelos computacionais (*Pseudo-Random Number Generators*) que, na prática, são suficientemente bons para a maioria das necessidades humanas, ainda é necessário recorrer a fenómenos naturais para determinar números completamente aleatórios (*True Random Number Generators*). Esta necessidade de verdadeiros números aleatórios é crucial em certas áreas, como a criptografia, pois só assim se garante, por exemplo, a segurança dos dados pessoais, bancários, etc. (consultar [3] para mais pormenores).

2. Matemática e democracia

"Uma publicação da UNESCO de 2022 intitulada Mathematics for Action defende, com detalhes acessíveis a um público alargado, que todos os Objetivos do Desenvolvimento Sustentável das Nações Unidas precisam de intervenção e decisões baseadas em fundamentos matemáticos. […]

Foi por isso com muita surpresa que li o texto do deputado Nélson Brito no Observador do dia 10 de junho de 2024. Defender que no Ensino Secundário apenas deveriam ser obrigatórios Português, Inglês e Educação Física e que uma alternativa à Matemática poderia ser "estatística, análise de dados, matemática financeira, econometria" é um duplo erro. Primeiro, todos os cidadãos precisam de (muita) Matemática para além do Ensino Básico como o texto da UNESCO (e muitos outros) evidenciam, por outro lado todas as áreas que refere, "estatística, análise de dados, matemática financeira, econometria", se baseiam em Matemática muito para além do lecionado no Ensino Básico, sem a qual não podem ser minimamente trabalhadas." (Jaime Carvalho e Silva, [4])

De facto, reduzir todo o estudo/investigação e todo o ensino à componente utilitária das coisas tem sido prática corrente de alguns comentadores e de algumas políticas públicas. E esta visão tem sido castradora, por exemplo, para muitas áreas como a Literatura, a História e as Artes, que têm muita dificuldade em encontrar fontes de financiamento em detrimento de áreas mais rentáveis... Reduzir a utilidade da Matemática à sua componente aplicada é não conhecer a Matemática, nem sequer conhecer o processo como a Matemática encontra a sua aplicabilidade no mundo real… Será que Newton quando enunciou a lei da gravitação universal sabia que tal conhecimento ia ser rentável, pois iria ser aplicado, por exemplo, na órbita de satélites? E, já agora, porquê aplicar apenas a Matemática à Finança e à Economia e não a outras áreas como a Química, a Física, a Medicina e a Astronomia? Ah, suponho que já sei: ou os cifrões estão mesmo à frente dos nossos olhos ou então não conseguimos ver mais além…

De facto, a educação sofre um pouco do mesmo mal do futebol: todos são treinadores de bancada e todos fariam melhor do que os especialistas que lá estão!

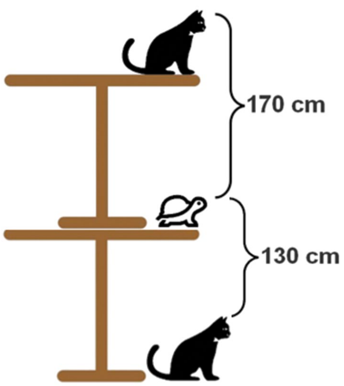
3. O teorema do ponto fixo de Brouwer

"Vocês sabiam que ao mexerem o café numa chávena, existe sempre um ponto do café que fica no mesmo sítio? Mesmo que sejam agressivos! Isto deve-se ao teorema do ponto fixo de Brouwer (…)" [5]

Duas notas breves sobre a frase acima: 1) Em rigor, deveria ser referido que existe, pelo menos, um ponto nessas condições (apesar de extremamente improvável, poderia dar-se o caso de termos vários pontos a terminarem no sítio onde começaram… No limite, até podíamos ter todos os pontos nessa situação… Imagine-se uma rotação da bebida em relação ao centro da chávena que seja múltipla de 360º); 2) Deveria ter-se reforçado, talvez, que esta afirmação só é verdadeira se compararmos o início e o fim de mexermos o café. Durante esse intervalo de tempo, todos os pontos do café podem ter-se movimentado nalgum momento e não há maneira de garantirmos o contrário. Em rigor, não é preciso esperar pelo final de mexer o café: em qualquer momento, existe sempre, pelo menos, um ponto que está no mesmo sítio onde estava inicialmente.

SOLUÇÕES DOS DESAFIOS PROPOSTOS NO NÚMERO ANTERIOR

A mesa no problema do gato e da tartaruga mede 150 centímetros. Basta considerar uma mesa em cima da outra, como na figura abaixo, para concluir que duas mesas sobrepostas medem 300 centímetros. Por outro lado, nada pode concluir-se sobre a altura dos animais, a não ser que o gato mede mais 20 cm do que a tartaruga (basta observar que $m + g = t + 170$ e $m + t = g + 130$ e comparar as variáveis t e g).



Na segunda questão colocada no número anterior, se $a + b = 1$ e $a^2 + b^2 = 2$, então verifica-se a igualdade $a^{11} + b^{11} = \frac{989}{32}$. Pode encontrar uma explicação detalhada da resolução desta questão em [6].

No problema "Se $x + xy + y = 54$, a que é igual $x + y$?" (por lapso, no número anterior não foi indicado que as duas variáveis x e y têm de ser números inteiros positivos), a solução é 14.

Para chegar à solução, basta observar que a equação indicada é equivalente à equação $(x+1)(y+1) = 55$. Note-se ainda que cada fator desta equação terá de ser maior do que dois pela restrição agora indicada, o que obriga a que um dos fatores seja 5 e o outro 11 (55 é decomposto apenas nos fatores primos 5 e 11). Por outro lado, verifica-se ainda que

$$x + y = (x+1) + (y+1) - 2$$

e, portanto, conclui-se facilmente que

$$x + y = 5 + 11 - 2 = 14.$$

Note-se que, sem a restrição agora indicada, $x + y$ não têm um valor único (considere, por exemplo, as situações a seguir):

- $x = 0$, implica que $y = 54$ (logo, a soma seria igual a 54);
- $x = 1$, implica que $1 + y + y = 54$, ou seja, $y = \frac{53}{2}$ (a soma seria, portanto, igual a 552).

A solução natural de $\begin{cases} ab + c = 2020 \\ a + bc = 2021 \end{cases}$ é (673,2,674).

A solução natural de $\begin{cases} ab + c = 2023 \\ abc = 2022 \end{cases}$ é (1,1,2022).

Até ao próximo número do nosso Recreio!

REFERÊNCIAS

[1] Stewart, I. (1989). *Game, Set, and Math: Enigmas and Conundrums*. Basil Blackwell.

[2] BBC News Brasil, 26 de julho 2024. *https://www.bbc.com/portuguese/articles/c51y05zev73o*

[3] Lugrin, T. (2023). "Random Number Generator". In: Mulder, V., Mermoud, A., Lenders, V., Tellenbach, B. (eds) *Trends in Data Protection and Encryption Technologies*. Springer. *https://doi.org/10.1007/978-3-031-33386-6_7*

[4] Carvalho e Silva, J., *Observador*, 15 de junho de 2024. *https://observador.pt/opiniao/matematica-e-democracia*

[5] *Mathgurl*, YouTube, 8 de maio de 2024. *https://youtube.com/shorts/lPAS8sJ2Ob8?si=zwviyg_XlqSxnWtd* (transcrição do vídeo)

[6] Bhannat Maths, YouTube, 10 de março de 2023. *https://www.youtube.com/watch?v=YKEr7OW-VIc*