

The background of the page features a close-up, slightly blurred image of several colored pencils (yellow, orange, pink, purple, and blue) lying on a white surface. Overlaid on this image are various mathematical symbols and formulas in a light, semi-transparent font, including  $(\kappa\beta + \varepsilon, 0)$ ,  $\text{Log}_e(y)$ ,  $X) xsm = Y$ , and  $\beta + \sigma\varepsilon$ .

## O PROBLEMA \*16 REVISITADO

CARLOS GOMES

ESCOLA SECUNDÁRIA DE AMARANTE

[carlosgomes@esamarante.edu.pt](mailto:carlosgomes@esamarante.edu.pt)

<https://orcid.org/0000-0003-1205-7795>

Muitos são os exemplos em que um problema apresentado aos alunos (em manuais, cadernos de exercícios, provas, exames nacionais) não é mais do que um caso particular de um resultado geral. Neste texto trazemos como exemplo um problema de um exame nacional, para tentar mostrar o potencial didático que ele pode conter quando o exploramos, com tempo, na sala de aula ou fora dela. Colocando ênfase nas premissas que garantem o resultado solicitado, usando o arsenal matemático já disponível, ou outro ainda por explorar, testando hipóteses recorrendo a modelos dinâmicos criados para o efeito, é prazer garantido, não para todos, mas para muitos que estão à sua espera, ao abrigo da escola inclusiva.

## O PROBLEMA

Considere as funções  $f$  e  $g$ , de domínio  $]0, +\infty[$ , definidas por  $f(x) = \frac{k}{x}$  e por  $g(x) = -\frac{k}{x}$ , com  $k > 0$ .

Considere ainda:

- ▶ dois pontos  $P$  e  $Q$ , com a mesma abscissa, pertencentes, respetivamente, ao gráfico da função  $f$  e ao gráfico da função  $g$ ;
- ▶ a reta  $s$ , tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $P$ ;
- ▶ a reta  $t$ , tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto  $Q$ ;
- ▶ o ponto  $R$ , ponto de intersecção das retas  $s$  e  $t$ .

Mostre que, qualquer que seja a abscissa dos pontos  $P$  e  $Q$ , a área do triângulo  $[PQR]$  é igual a  $k$ .

Problema \*I6 - Exame Nacional de Matemática A - 2023 2.ª F

## PRIMEIRAS IMPRESSÕES

Neste problema, é com relativa tranquilidade que se percebe que a condição  $f = -g$  e  $f(x) \neq 0$ , para todo o  $x \in D_f$ , é suficiente para que  $R$  tenha a sua existência garantida no eixo  $Ox$ . E isto é claro porque sabemos que  $f'(x) \neq 0$  em todo o domínio considerado. Caso  $f'(x) = 0$ , para algum  $x$ , o ponto  $R$  deixaria de existir (assim como o  $\triangle[PQR]$ ). As imagens abaixo ilustram as duas situações para a função  $f(x) = e^{\sin x} + 2$ .

Note-se que, em geral, como se pode ver pelas figuras 1 e 2, a área do triângulo  $[PQR]$  não é constante, quando a abscissa de  $P$  e  $Q$  varia, ao contrário do que acontece no Problema 16 para a função  $f(x) = \frac{k}{x}$ . Em geral, quando  $f'(\alpha) = 0$ , a área "explode" para  $\infty$  quando  $x$  tende para  $\alpha$ .

O leitor pode, se entender, manipular a construção *GeoGebra*<sup>1</sup> experimentando outras funções a seu gosto. Casos que pode ser interessante experimentar:

$$f(x) = e^x; f(x) = \operatorname{tg}(x); f(x) = \frac{20}{x-2}; f(x) = 5;$$

$$f(x) = x^n; f(x) = \operatorname{tg}^n(x); f(x) = \operatorname{sen}^n(x) \quad (n \geq 2).$$

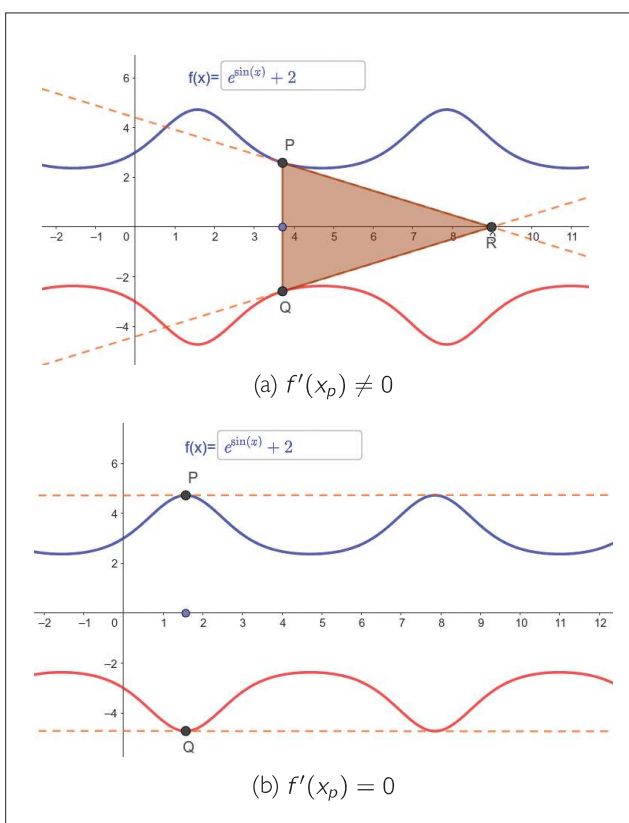


Figura 1.  $f(x) = -g(x)$  e  $f'(x) \neq 0$ , garantem que  $R$  está no eixo  $Ox$ .

<sup>1</sup> <https://www.geogebra.org/m/xfkxhxcxm>

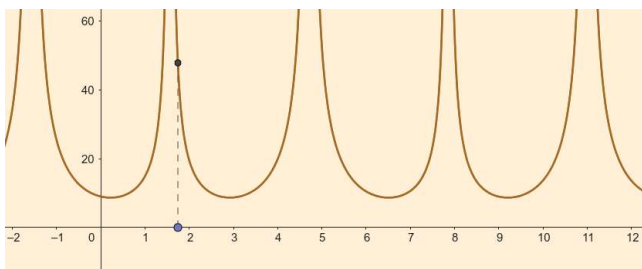


Figura 2. Gráfico da função  $A_{\Delta[PQR]}(x)$  para  $f(x) = e^{\sin x} + 2$ .

## GENERALIZAÇÕES

A função  $f$  que surge no Problema 16, e a área constante que daí resulta, é apenas um caso particular do seguinte resultado.

**Teorema 1.** (Área do triângulo) *Seja  $f$  uma função positiva diferenciável num intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Considere ainda:*

- dois pontos  $P$  e  $Q$ , com a mesma abscissa  $\alpha$ , pertencentes, respetivamente, aos gráficos de  $f$  e  $-f$ , satisfazendo  $f'(\alpha) \neq 0$ ;
- a reta  $s$ , tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto  $P$ ;
- a reta  $t$ , tangente ao gráfico da função  $-f$  no ponto  $Q$ ;
- o ponto  $R$ , ponto de intersecção das retas  $s$  e  $t$ .

Então, a área do triângulo  $[PQR]$  é dada por

$$A(\alpha) = \frac{f(\alpha)^2}{|f'(\alpha)|}.$$

*Demonstração.* Equações das retas  $s$  e  $t$ :

$$\begin{aligned} s: y &= f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha); \\ t: y &= -f'(\alpha)(x - \alpha) - f(\alpha). \end{aligned} \quad (1)$$

A intersecção das retas apenas não ocorre se  $f'(\alpha) = 0$ , pois nesse caso  $s \parallel t$ , que não são coincidentes porque  $\alpha$  não é um zero de  $f$ .

Sendo  $R(x, y)$  o ponto referido no enunciado, das equações (1) resulta que

$$\begin{aligned} y &= -f'(\alpha)(x - \alpha) - f(\alpha) \\ &= -[f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)] = -y \end{aligned}$$

o que equivale a

$$y = 0. \quad (2)$$

O que significa que o ponto  $R$  vive no eixo  $Ox$ , sendo a sua abscissa,  $x$ , a solução da equação ( $\alpha$  fixo)

$$f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) = 0.$$

Resolvendo-a,

$$\begin{aligned} f'(\alpha)(x - \alpha) &= -f(\alpha) \\ \Leftrightarrow x - \alpha &= -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \\ \Leftrightarrow x &= \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Segue-se de (2) e (3) que  $R$  tem de coordenadas

$$R\left(\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, 0\right).$$

Assim, a área do triângulo  $[PQR]$  será dada por

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} \left| 2f(\alpha) \left( \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} - \alpha \right) \right| = \frac{f(\alpha)^2}{|f'(\alpha)|}. \quad (4)$$

□

No Problema 16,  $f(x) = \frac{k}{x}$  e  $g(x) = -f(x)$ , sendo que  $f$  é diferenciável e  $f(x) \neq 0$ ,  $f'(x) \neq 0$  no domínio considerado. Verificando o resultado (4),

$$A(\alpha) = \frac{\left(\frac{k}{\alpha}\right)^2}{\left|-\frac{k}{\alpha^2}\right|} = \frac{k^2}{\alpha^2} \times \frac{\alpha^2}{k} = k.$$

**Nota para reflexão:** A abscissa do ponto  $R$ ,  $x_\alpha = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ , e a fórmula recursiva no método de Newton,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

não têm o mesmo aspeto por acaso, pois não? No caso particular da função  $f(x) = \frac{k}{x}$ ,  $x_{n+1} = 2x_n$ , o que não surpreende mas traduz certas propriedades geométricas únicas presentes nas hipérbolas, nomeadamente algumas relacionadas com áreas (voltaremos a este aspeto mais tarde, numa demonstração quase visual...).

## MAIS ALÉM...

Tal como observámos atrás, em geral, a área  $A_\Delta(x)$  do triângulo  $[PQR]$  não é uma função constante.

Por exemplo, se  $f(x) = e^{\sin(x)} + 2$  (figura 1), basta observar que esta tem extremos, para afirmar que a área do triângulo  $[PQR]$  varia. Neste exemplo, essa área é dada, para cada valor de  $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + t\pi, t \in \mathbb{Z}\}$ , pela função

$$A_\Delta(x) = \frac{f(x)^2}{|f'(x)|} = \frac{(e^{\sin x} + 2)^2}{e^{\sin x} |\cos x|},$$

cujas representação gráfica se encontra na figura 2.

No entanto, no Problema 16 estamos perante uma

função,  $f(x) = \frac{k}{x}$ , com  $A_{\Delta}(x) = k$  constante! Já sabemos que  $f(x) = \frac{k}{x}$  é diferenciável e não tem extremos. Mas isso não chega para garantir que a área do triângulo  $[PQR]$  seja constante: a função  $f(x) = e^x$  também é diferenciável e não tem extremos, no entanto  $A_{\Delta}(x) = e^x$  (curioso!). Assim, a questão que se pode colocar é:

Quais são exatamente as funções que têm como função área associada,  $A_{\Delta}(x)$ , uma função constante  $k$  positiva?

A resposta está no seguinte resultado.

**Teorema 2.** (Funções de área associada constante) *Seja  $f$  uma função diferenciável com  $f(x) \neq 0$ ,  $f'(x) \neq 0$  num intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ , e o triângulo  $[PQR]$  tal como definido no Teorema 1. Então,*

$$A_{\Delta}(x) = k \text{ (constante positiva)} \iff f(x) = \pm \frac{k}{x+c'} \text{ com } c \text{ constante.}$$

*Demonstração.* ( $\Leftarrow$ ) Basta substituir  $f(x)$  e  $f'(x)$  na expressão  $A(x) = \frac{f(x)^2}{|f'(x)|}$  e verificar que tudo se simplifica para  $k$  (é deixado como exercício).

( $\Rightarrow$ ) Nesta implicação temos de resolver a equação

$$\frac{f(x)^2}{|f'(x)|} = k$$

em ordem a  $f(x)$  e mostrar que a solução é a família de funções

$$f(x) = \pm \frac{k}{x+c}.$$

Fazendo  $y = f(x)$ , a equação (diferencial) fica

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{|y'|} &= k \iff y^2 = k|y'| \iff \\ \iff y^2 &= -ky' \quad (y' < 0) \vee y^2 = ky' \quad (y' > 0).^2 \end{aligned}$$

Resolvendo cada uma das equações da disjunção,

$$\begin{aligned} y^2 &= -ky' \iff -\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{k} \Rightarrow \int -\frac{y'}{y^2} dx \\ &= \int \frac{1}{k} dx \iff \frac{1}{y} = \frac{x+c}{k} \iff y = \frac{k}{x+c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 &= ky' \iff \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{k} \Rightarrow \int \frac{y'}{y^2} dx \\ &= \int \frac{1}{k} dx \iff -\frac{1}{y} = \frac{x+c}{k} \iff y = -\frac{k}{x+c}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$f(x) = \pm \frac{k}{x+c}$$

□

Esta expressão define uma família (infinita) de funções, uma para cada valor da constante real  $c$ , de modo que a área do triângulo  $[PQR]$  é sempre  $k$ , para cada valor de  $c$ .

O leitor pode, se entender, manipular a construção *GeoGebra*<sup>3</sup>, visualizando as curvas integrais da equação diferencial e as soluções para as condições iniciais definidas pelo leitor, assim como o triângulo  $[PQR]$ .

No exemplo dado na figura 3, para  $k = 15$  e para a condição  $f(3) = 5$ , ou seja, para que o gráfico de  $f$  contenha o ponto  $(3, 5)$  e a área do triângulo seja 15,  $c = 0$ .

Fica como exercício verificar que  $c$  pode ser obtido, em função da condição inicial  $f(a) = \beta$ , pela expressão  $c = \frac{k-a\beta}{\beta}$ .

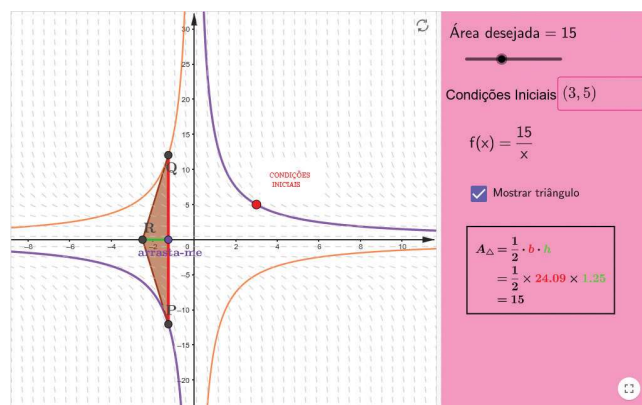


Figura 3.  $k = 15$  e condição inicial  $f(3) = 5$ .

## O REGRESSO À SIMPLICIDADE

Quando se consultam os critérios de classificação deste item, existe uma clara orientação para uma abordagem usando essencialmente ferramentas relacionadas com derivadas de funções e geometria analítica.

A geometria analítica é uma ferramenta muito valiosa que nos foi dada pelos matemáticos do século XVII para resolvermos problemas de geometria (e não só), mas não deve ser vista como uma imposição!

Vejamos uma alternativa de resolução do Problema 16, que deveria estar incluída nos critérios de classificação, e como essa abordagem ao problema permite apresentar uma prova alternativa da implicação ( $\Leftarrow$ ) do Teorema 2 (abdicando do resultado dado pelo Teorema 1), com al-

<sup>2</sup> Pelo T. de Darboux, como  $D_f$  é um intervalo,  $f'(x) > 0 \forall x \in D_f$  ou  $f'(x) < 0 \forall x \in D_f$ .

<sup>3</sup> <https://www.geogebra.org/m/se685zbs>

16. ....

Designe-se por  $a$  a abscissa dos pontos  $P$  e  $Q$ .

Reconhecer que as ordenadas dos pontos  $P$  e  $Q$  são, respectivamente,

$\frac{k}{a}$  e  $-\frac{k}{a}$  ..... 2 pontos

Determinar  $f'(x)$  e  $g'(x)$  ..... 2 pontos

Obter as equações das retas tangentes aos gráficos das funções  $f$  e  $g$ ,  
respetivamente, nos pontos  $P$  e  $Q$  ..... 2 pontos

Determinar as coordenadas do ponto  $R$  ..... 2 pontos

Reconhecer que  $a$  é a altura do triângulo  $[PQR]$  relativa ao lado  $[PQ]$  ..... 2 pontos

Reconhecer que  $\frac{2k}{a}$  é o comprimento de  $[PQ]$  ..... 2 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

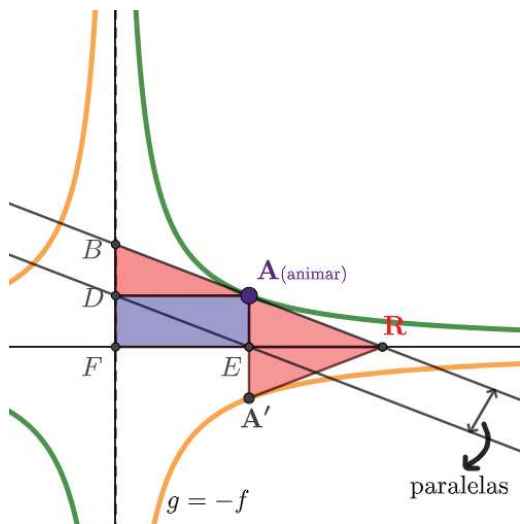


Figura 5. Hipérbole e gráfico de  $f(x) = \frac{k}{x}$ .

guns recursos de geometria sintética que, em última instância, derivam de propriedades da hipérbole.

Partamos da situação mais simples, exatamente a função do Problema 16,  $f(x) = \frac{k}{x}$ . Esta é a conhecida função de proporcionalidade inversa de constante  $k$ , já muito familiar no Ensino Básico. Também se pode escrever  $xy = k$ . O significado geométrico desta expressão é óbvio, muito explorado no 9.º ano: a área do quadrilátero  $[FEAD]$ , de dimensões  $x = \overline{FE}$  e  $y = \overline{EA}$ , é constante e igual a  $k$  (ver figura 5).

O declive da reta tangente em  $A(x, \frac{k}{x})$  é  $-\frac{k}{x^2} = f'(x)$ . O declive da reta  $ED$  também é  $-\frac{k}{x^2}$  (porquê?). Assim, as retas  $RB$  e  $ED$  são paralelas e  $\overline{BD} = \overline{AE}$  e  $\overline{DA} = \overline{ER}$ , uma vez que  $[BDEA]$  e  $[DERA]$  são paralelogramos. Assim, a área do retângulo  $[FEAD]$  é igual à soma das áreas dos

triângulos  $[BDA]$  e  $[ERA]$ , ou seja, o triângulo  $[FRB]$  pode sempre ser decomposto em quatro triângulos equivalentes (independentemente da localização do ponto  $A$  no gráfico de  $f(x) = \frac{k}{x}$ ). Por aqui fica arrumado o Problema 16 pois basta fazer uma simetria do triângulo  $[ERA]$  relativamente ao eixo  $Ox$  e obtemos o triângulo  $[AA'R]$  ( $[PQR]$  no problema) com área igual a  $k$ . O ponto  $A'$ , simétrico de  $A$  em relação ao eixo  $Ox$ , fica sobre o gráfico da função  $g = -f$ . Fica aqui<sup>4</sup> a proposta de manipular a construção *GeoGebra*, ou clicar sobre a figura 5, onde se pode observar os argumentos atrás apresentados.

Quando passamos para funções do tipo  $h(x) = \pm \frac{k}{x+c} = \pm f(x+c)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , as áreas são totalmente preservadas, pois as únicas transformações do gráfico de  $f$  são a translação e a simetria em relação a eixo  $Ox$  (10.º ano). Logo, tudo o que foi provado para  $f(x) = \frac{k}{x}$  fica provado para  $h(x) = \pm \frac{k}{x+c}$ , tendo em consideração que a assíntota  $x = -c$  faz o papel de eixo  $Oy$  em toda a construção geométrica descrita.

Assim,

$$f(x) = \pm \frac{k}{x+c} \xRightarrow[\text{Definição}]{} A_{[FEAD]} = k \xLeftrightarrow[\text{Prop. geométricas}]{} A_{[AA'R]} = k.$$

1

## SOBRE O AUTOR

**Carlos Gomes**, natural de Guimarães, completou todo o Ensino Secundário na Escola Secundária Francisco de Holanda. Licenciado em Ensino de Matemática pela Universidade do Minho, é professor de Matemática na Escola Secundária de Amarante (ESA) desde 2000.

<sup>4</sup> <https://www.geogebra.org/m/huy7sgez>