

Viver e morrer em Penantopólis



Na ilha Penantopólis todos os habitantes nascem e vivem todas as suas vidas com um chapéu na cabeça. Os chapéus podem ser vermelhos ou azuis. Os nativos não dispõem de espelhos e não querem indagar sobre a cor do próprio penante, se bem que todos sejam muito racionais e tenham ótimas capacidades dedutivas.

A razão para este comportamento está numa lei terrível, de todos conhecida, mas a que todos parecem indiferentes: *quem souber que a cor do seu chapéu é azul deve suicidar-se logo após a reunião diária* (uma boa tradição) que sempre ocorre ao fim do dia.

A vida decorria serenamente em Penantopólis até que um náufrago deu à ilha e, numa das reuniões, tomou conhecimento dessa horrível lei. Admirado, o estrangeiro, que se chamava Fagundes, disse: "É curioso, porque vejo pelo menos uma pessoa com chapéu azul".

Como continuará agora a vida em Penantopólis?

Vejamos, se houver somente uma pessoa com chapéu azul, esta, ao ouvir o estrangeiro, e vendo somente chapéus vermelhos, deduz imediatamente que se deve suicidar.

Se forem duas as pessoas com chapéu azul, chamemos-lhes *Ara* e *Breu*, então cada uma delas vê um chapéu azul, pelo que nada sucede na primeira noite. Mas na segunda, a nativa *Ara*, ao constatar que o *Breu* não se suicidou, compreende que é azul o seu próprio chapéu. O raciocínio do *Breu* é análogo. Temos dois suicídios na segunda noite.

O que se passa é que, se houver n pessoas com chapéus azuis, então elas matam-se na n -ésima noite.

A prova faz-se por indução.

Os casos $n=1$ e $n=2$ já foram analisados.

Suponhamos que, se houver k ilhéus com chapéus azuis, eles se suicidam à k -ésima noite.

Seja agora a *Zorra* um dos $k+1$ portadores de penante azul. Ela vê k chapéus azuis e não sabe se o total é k ou $k+1$. Mas, no fim da k -ésima noite, nada sucede, o que impossibilita o valor k e a leva a concluir que há $k+1$ chapéus azuis, suicidando-se, com os outros k , na noite seguinte. QED

O que causa esta vaga de suicídios? Sem a intervenção do Fagundes nada disto sucederia. Mas a sua intervenção é trivial, ele diz algo que todos sabem (se k for maior que 1). Se ele não introduz nada de novo, o que leva as pessoas a matarem-se?

Ilustremos com o caso em que há dois chapéus azuis, dos nativos *Ara* e *Breu*. Antes do estrangeiro chegar, a *Ara* sabia que o *Breu* tinha um chapéu azul e o *Breu* sabia que a *Ara* tinha um chapéu azul. Cada um deles parece saber mais do que a afirmação do Fagundes. Mas o que a *Ara* não sabia, e passou a saber, é que o *Breu* sabe que há pelo menos um chapéu azul; de forma semelhante, o *Breu* aprende do estrangeiro que a *Ara* sabe que há pelo menos um chapéu azul. Claro que podemos trocar os papéis da *Ara* e do *Breu* entre si, o que sucede a um sucede ao outro. Cada um deles passa a poder dizer a qualquer outro: “Agora sei que sabes que há pelo menos um chapéu azul”. É esta a novidade do Fagundes!

Uma variante que propomos aos leitores: Na ilha Pérola do Penante tudo funciona como em Penantópolis, com a diferença da lei mencionada. *Aqui, quem souber de que cor é o seu chapéu deve suicidar-se de imediato* (quer seja azul ou vermelho). Fagundes, de visita, disse: “Vejo todos os habitantes, que são 1 000 000, e constato que o número de chapéus azuis não é 17”. O que vai suceder agora na Pérola do Penante?

Sobre os problemas de pesagens, que aqui apareceram no número anterior, os leitores são convidados a visitar a página <http://ludicum.org/MR/probl/> onde encontrarão outras actividades similares.

Jorge Nuno Silva
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

Recreio

