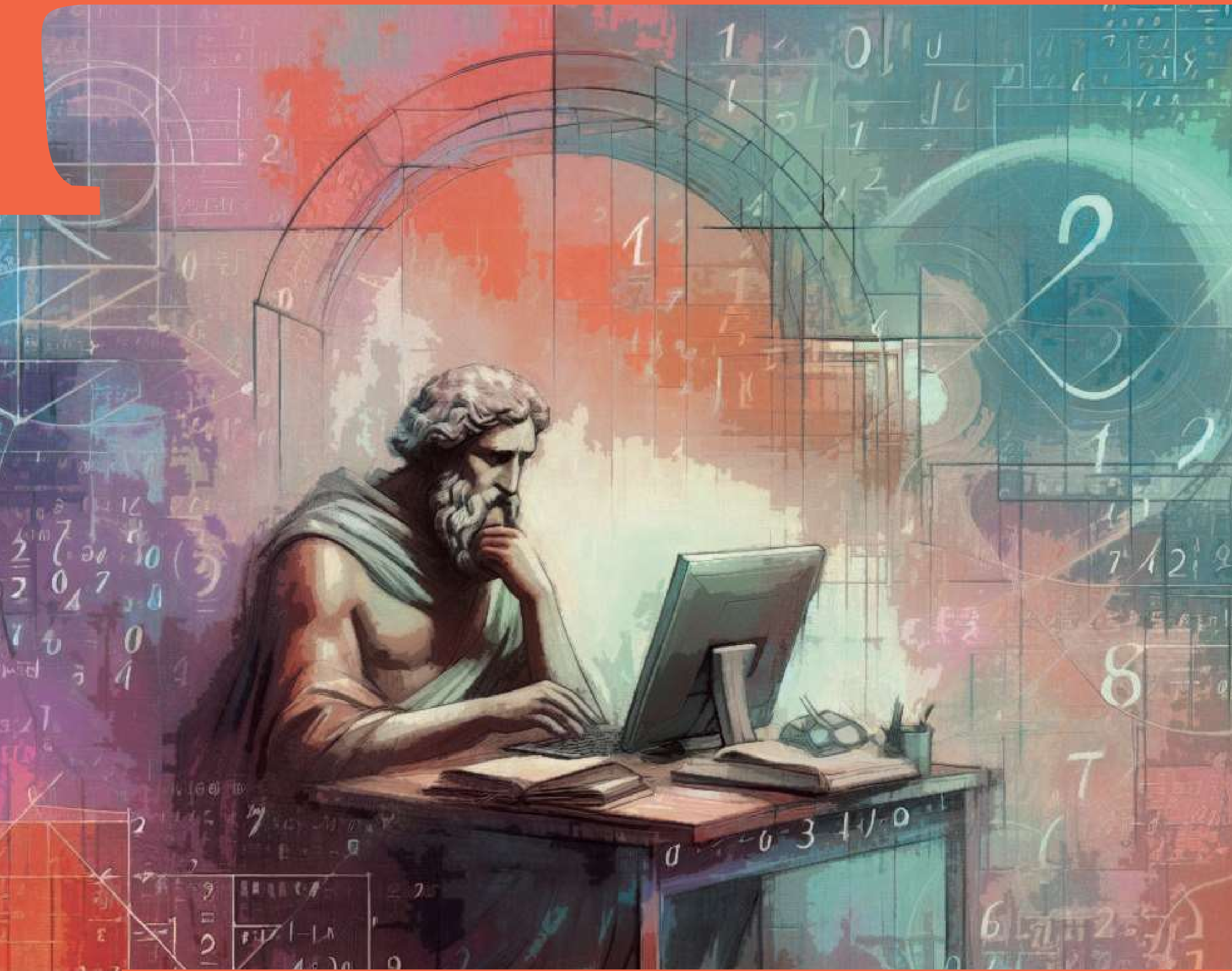

QUANTAS CASAS DECIMAIS CORRETAS DE π PODERIA ARQUIMEDES TER CALCULADO SE TIVESSE TIDO ACESSO A FOLHAS DE CÁLCULO MODERNAS?

Pedro J. Silva
LAQV/REQUIMTE, BioSIM, Faculdade de Medicina, Universidade do Porto
pedro.dft@gmail.com

Arquimedes obteve uma estimativa para π entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$ usando um método de aproximação geométrica. Este resultado é frequentemente mencionado em resumos da História da Matemática, mas raramente é demonstrado aos alunos, apesar do seu potencial para estimular a exploração matemática. Neste trabalho, propõe-se uma modificação simples do método de Arquimedes que pode ser facilmente compreendida e executada por alunos do 11.º ano, e mostra-se como as limitações inerentes à natureza discreta das computações digitais impedem a obtenção de níveis de precisão arbitrariamente altos.

INTRODUÇÃO

Os livros de texto de matemática frequentemente mencionam a tentativa de Arquimedes de obter um valor numérico para π através da comparação do perímetro de polígonos inscritos e circunscritos num determinado círculo (Struik, 1954). No entanto, os detalhes do método geralmente não são fornecidos, o que transmite aos alunos apenas uma história matemática interessante, mas os priva das aprendizagens e intuições que poderiam ter obtido por meio de suas próprias tentativas de reconstruir o caminho de Arquimedes. Nesta comunicação, descrevo um método simples para calcular uma aproximação de π através da comparação das áreas de aproximações poligonais convenientes da área do círculo. Além do seu uso como motivador da exploração matemática, este método, que é facilmente explicado a estudantes de trigonometria, oferece uma aplicação prática das relações trigonométricas fundamentais e pode ser usado para introduzir as limitações da aritmética de precisão finita (tal como possibilitada por calculadoras e computadores).

MÉTODO

A área de um círculo com raio $r = 1$ é π. Cada quadrante deste círculo unitário tem, portanto, uma área de $\frac{\pi}{4}$. Para calcular uma aproximação desse valor, podemos bissetar sucessivamente um quadrante e medir as áreas dos triângulos inscritos OAB (definidos pelos pontos onde os ângulos intersetam a circunferência (verde-claro, na figura 1) e as áreas dos triângulos "transbordantes" OAC.

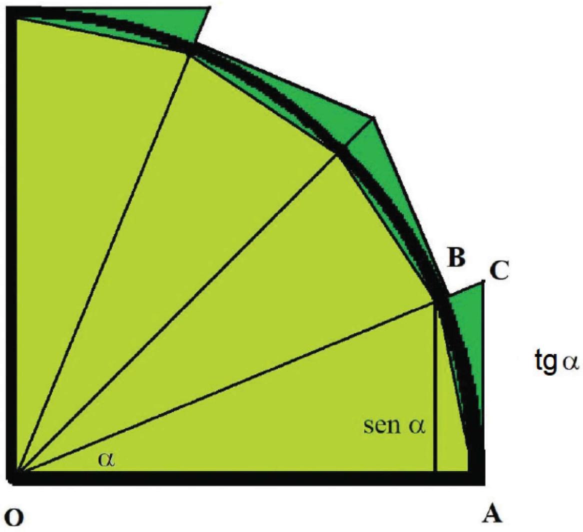

Figura 1. Construção de aproximações sucessivas da área de um quadrante circular através das suas bissecções sucessivas.

Após n bissecções do quadrante, temos 2^n triângulos OAB, cada um com área $\frac{1}{2}\,\text{sen}(\alpha)$, (onde α é o ângulo AOB, i.e., $\frac{\pi}{2^{n+1}}$) e 2^n triângulos OAC, cada um com área $\frac{1}{2}\,\text{tg}(\alpha)$. Como $\frac{\pi}{4}$ deve estar compreendido entre as áreas dos triângulos OAB e dos triângulos OAC, segue-se que

$$\frac{2^n\,\text{sen}(\alpha)}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{2^n\,\text{tg}(\alpha)}{2}.$$

Os valores de $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{tg}(\alpha)$ podem ser calculados sucessivamente a partir das relações trigonométricas básicas, que já devem ser familiares aos alunos do 11.º ano, mas podem, no entanto, ser deduzidas diretamente das fórmulas do cosseno da soma de ângulos

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\,\text{sen}(b)$$

e da identidade pitagórica:

$$\cos^2(a) + \text{sen}^2(a) = 1.$$

Fazendo $a = b$, segue que

$$\cos(a+a) = \cos^2(a) - \text{sen}^2(a)$$
$$= \cos^2(a) - \Big(1-\cos^2(a)\Big) = 2\cos^2(a) - 1$$

e portanto

$$\cos(2a) + 1 = 2\cos^2(a),$$

o que implica, para ângulos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, que o cosseno, o seno e a tangente do ângulo dividido podem ser prontamente calculados a partir do cosseno do ângulo original usando as expressões

$$\cos(a) = \sqrt{\frac{\cos(2a)+1}{2}},$$
$$\text{sen}(a) = \sqrt{\frac{1-\cos(2a)}{2}}$$
$$\text{e tg}\,(a) = \frac{\text{sen}(a)}{\cos(a)}$$

Este algoritmo pode ser facilmente implementado numa folha de cálculo, e um gráfico das áreas dos triângulos OAB inscritos e dos triângulos OAC "transbordantes" mostra que, ao contrário do esperado, após cerca de 15 bissecções as áreas calculadas param de convergir (figura 2).

Os problemas de convergência não se devem a nenhuma falha do algoritmo, mas são uma consequência inevitável do uso da aritmética de precisão finita em computadores comuns, uma vez que os números geralmente são armazenados na memória com um número finito de dígitos e várias manipulações aritméticas conduzem inevitavelmente a uma degradação da sua qualidade. Essa degradação ocorre da seguinte forma: os números são armazenados utilizando a representação em vírgula flutuante como uma combinação de um número inteiro (o expoente) e um número decimal (ou binário) entre 0,1000000000... e 0,999999999...(chamado "mantissa"). Por exemplo, num computador que usa dez dígitos para a mantissa, o número exato 2 é representado como $0,2000000000 \times 10^1$. Este número, portanto, contém dez dígitos exatos na mantissa. Extraindo a sua raiz quadrada obtém-se, nesta notação, $0,1414213562 \times 10^1$. Se um número suficientemente próximo deste for subtraído desta representação de $\sqrt{2}$ (por exemplo, 1,4142), o resultado final é

$$0,1414213562 \times 10^1 - 0,1414200000 \times 10^1,$$

que contém apenas cinco algarismos significativos corretos. A conversão deste número para o formato interno $0,135620000 \times 10^{-4}$ produz uma mantissa com dez dígitos, mas crucialmente apenas os cinco primeiros desses dígitos são exatos. Cálculos subsequentes, portanto, incorrerão em custos de precisão significativos, e são necessários algoritmos engenhosos para evitar erros numéricos quando se realizam subtrações sucessivas de números quase iguais (como sucede no cálculo instantâneo de desvios-padrão de uma série de observações muito semelhantes, cf. Press et al., 2002).

No algoritmo apresentado acima, as subtrações de

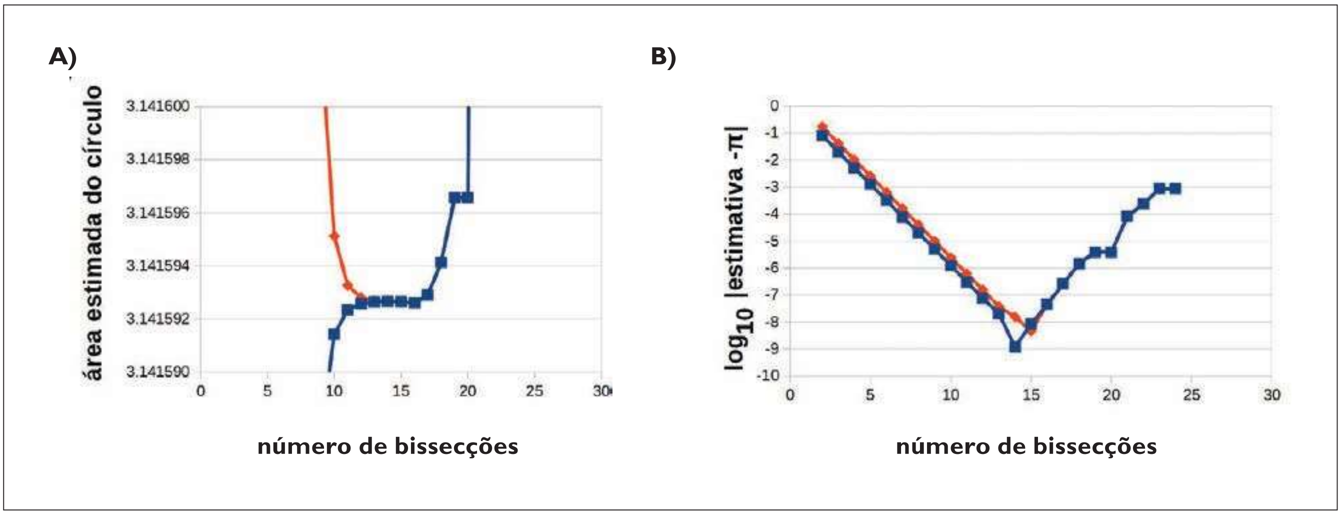

Figura 2. **A)** Evolução das estimativas calculadas da área do círculo à medida que o número de bissecções de um quadrante aumenta. Azul: estimativa com base nos triângulos internos da OAB; laranja: estimativa baseada nos triângulos OAC "transbordantes". **B)** Evolução do erro absoluto da estimativa de π, em escala semilogarítmica.

Tabela 1: Perda de precisão numérica à medida que os ângulos bissetados se tornam cada vez menores. Cálculos efetuados no LibreOffice Calc, que representa números internamente com uma mantissa de 15 dígitos decimais. Nos limites inferior e superior de π, os dígitos que não foram afetados pela perda de precisão estão destacados a negrito.

Número de bissecções	Triângulos em cada quadrante	cos α	Dígitos significativos perdidos ao calcular sen α usando a identidade pitagórica	Dígitos significativos perdidos ao calcular sen α usando a fórmula da bissecção	Limite inferior para π	Limite superior para π
	1	0	0	0	**2,00000000000000**	N/D
1	2	0,707106781186548	1	0	**2,82842712474619**	**4,00000000000000**
2	4	0,923879532511287	1	1	**3,0614674589207**2	**3,3137084989847**6
3	8	0,98078528040323	2	2	**3,121445152258**05	**3,182597878074**53
4	16	0,995184726672197	3	2	**3,136548490545**94	**3,151724907429**26
5	32	0,998795456205172	3	3	**3,14033115695**474	**3,14411838524**589
6	64	0,999698818696204	4	3	**3,14127725093**276	**3,14222362994**244
7	128	0,999924701839145	4	4	**3,1415138011**4415	**3,1417503691**6881
8	256	0,999981175282601	5	5	**3,141572940**36788	**3,141632080**70397
9	512	0,999995293809576	6	5	**3,141587725**27996	**3,14160251**025961
10	1024	0,999998823451702	6	6	**3,14159142**150464	**3,14159511**774302
11	2048	0,999999705862882	7	6	**3,14159234**561108	**3,14159326**967027
12	4096	0,999999926465718	7	7	**3,14159257**654500	**3,14159280**755978
13	8192	0,999999981616429	8	8	**3,141592**63346325	**3,141592**69121694
14	16384	0,999999995404107	9	8	**3,141592**65480759	**3,141592**66924601
15	32768	0,999999998851027	9	9	**3,14159**264532122	**3,14159**264893082
16	65536	0,999999999712757	10	9	**3,14159**260737572	**3,14159**260827812
17	131072	0,999999999928189	10	10	**3,1415**9291093967	**3,1415**9291116527
18	262144	0,999999999982047	11	11	**3,141**59412519519	**3,141**59412525159
19	524288	0,99999999995512	12	11	**3,141**59655370482	**3,141**59655371892
20	1048576	0,99999999998878	12	12	**3,14**159655370482	**3,14**159655370834
21	2097152	0,99999999999719	13	12	**3,14**167426502176	**3,14**167426502264
22	4194304	0,99999999999993	13	13	**3,1**4182968188920	**3,1**4182968188942
23	8388608	0,99999999999982	14	14	**3**,14245127249413	**3**,14245127249419
24	16777216	0,999999999999996	15	14	**3**,14245127249413	**3**,14245127249415

números que diferem em apenas 10^{-4} ocorrem muito rapidamente, após apenas oito bissecções sucessivas, ou seja, quando cada quadrante foi dividido em apenas 256 partes iguais. A estimativa neste ponto, portanto, perdeu cinco algarismos significativos. Após 15 bissecções sucessivas, a estimativa perdeu até dez algarismos significativos, e qualquer aumento na precisão que possa ser obtido por mais bissecções é completamente anulado pela perda de algarismos significativos (ver tabela 1). A análise desta tabela mostra que as limitações da aritmética de precisão finita impedem o uso deste método para calcular uma estimativa mais precisa de π do que $3,1415925 < \pi < 3,1415928$, que é obtida através da divisão de um quadrante do círculo em 4096 partes iguais. Podem obter-se melhores estimativas, no entanto, se se abandonar o uso de folhas de cálculo em favor de soluções mais elaboradas, como, por exemplo, as bibliotecas de precisão arbitrária (Fredrik Johansson, 2013) em Python, e pode alcançar-se a convergência mais rapidamente se abandonarmos a abordagem de Arquimedes e, em vez disso, calcularmos π usando somas apropriadas e rapidamente convergentes (Borwein & Borwein, 1987), como a expansão de Taylor da fórmula de Machin ou outras. Uma possibilidade mais simples consiste em evitar o cancelamento subtrativo através do cálculo das funções trigonométricas dos ângulos bissetados utilizando fórmulas que não incluam subtrações. Para isso, é necessário utilizar uma outra fórmula de cálculo do seno do ângulo bissetado, que pode ser deduzida da seguinte forma:

De (1) e do facto de a ser um ângulo do primeiro quadrante, resulta

$$\cos(2a) + 1 = 2\cos^2(a) \Leftrightarrow \sqrt{\cos(2a)+1} = \sqrt{2}\cos(a).$$

Multiplicando ambos os lados por $\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(a)$, obtém-se

$$\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(a)\sqrt{\cos(2a)+1} = 2\,\mathrm{sen}(a)\cos(a)$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sen}(a) = \frac{2\,\mathrm{sen}(a)\cos(a)}{\sqrt{2}\sqrt{\cos(2a)+1}} \Leftrightarrow \mathrm{sen}(a) = \frac{\mathrm{sen}(2a)}{\sqrt{2}\sqrt{\cos(2a)+1}}.$$

Utilizando esta fórmula para o cálculo do seno e, por conseguinte, da tangente, evita-se a perda de precisão observada anteriormente e a estimativa de π converge sucessivamente para o valor correto de π (figura 3). Após 24 bissecções obtém-se $3,141592653589785 < \pi < 3,141592653589805$, bastante próximo da máxima precisão atingível numa representação de vírgula flutuante com 16 algarismos decimais na mantissa.

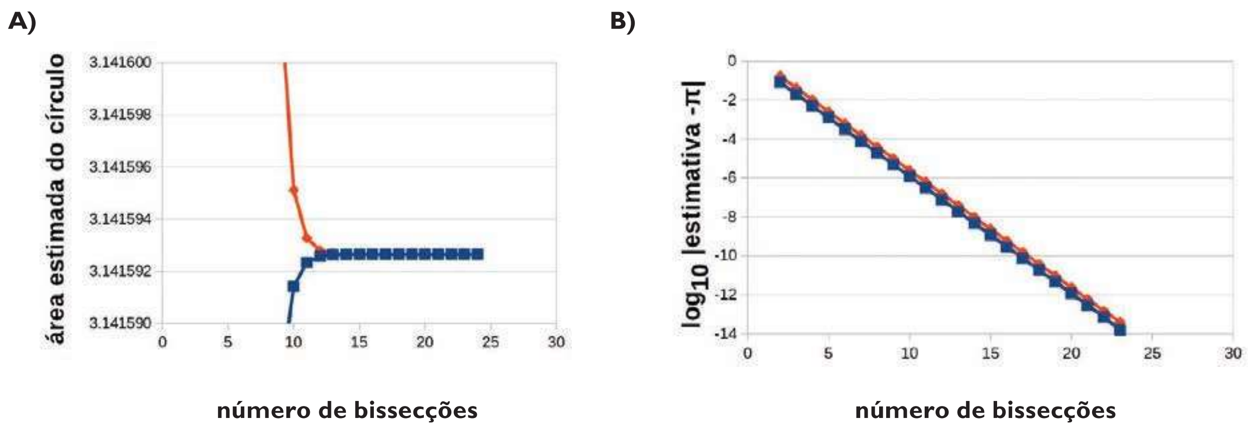

Figura 3: **A)** Evolução das estimativas calculadas da área do círculo à medida que o número de bissecções de um quadrante aumenta, utilizando fórmulas de bissecção que não sofrem de cancelamento subtrativo. Azul: estimativa com base nos triângulos internos OAB; laranja: estimativa baseada nos triângulos OAC "transbordantes". **B)** Evolução do erro absoluto da estimativa de π, em escala semilogarítmica.

Agradecimento
O autor agradece ao revisor deste trabalho, pela sugestão de utilização da fórmula não subtrativa do cálculo do seno do ângulo bissetado.

REFERÊNCIAS

[1] Struik, D. J. (1954). *A Concise History of Mathematics*. G. Bell and Sons, Ltd.

[2] Press W. H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling and B.P. Flannery (2002). "Numerical Recipes" in *C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge: Cambridge University Press.

[3] Borwein, J. M. e P. B. Borwein (1987). *Pi and the AGM*. John Wiley and Sons.

[4] Johansson, F. (2013). *Mpmath: a Python Library for Arbitrary-precision Floating-point Arithmetic*.

SOBRE O AUTOR

Pedro J. Silva licenciou-se em Bioquímica em 1996 na Universidade do Porto, tendo-se doutorado em Química em 2001 pela mesma universidade. É atualmente investigador no Grupo de Simulações Biomoleculares (BIOSIM) do Laboratório Associado para a Química Verde, onde estuda reatividade química e catálise enzimática com métodos de química computacional (química quântica e simulações de dinâmica molecular).