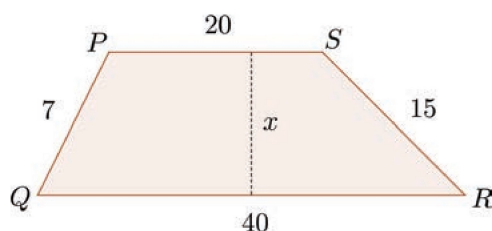


Seguiu-se um problema² em que novamente se deu ênfase à técnica do relacionamento entre diferentes formas de calcular uma área:

Na figura seguinte, o trapézio $[PQRS]$ tem o lado $[PS]$ paralelo ao lado $[QR]$. Além disso, temos $\overline{PQ} = 7$, $\overline{QR} = 40$, $\overline{RS} = 15$, e $\overline{PS} = 20$. Seja x a distância entre os lados paralelos $[PS]$ e $[QR]$. Qual é o valor de x ?



O último problema resolvido durante a aula era o mais abstrato e tinha um ligeiro perfume a Teoria dos Números:

As medidas dos lados de um triângulo exprimem-se, em cm, por três inteiros consecutivos, e a sua área, em cm^2 , é dada por um inteiro. Prova que o menor lado do triângulo tem comprimento ímpar, em cm.

4. SOBRE A DEMONSTRAÇÃO

Podemos encontrar na página *web* das Olimpíadas Brasileiras de Matemática uma demonstração algébrica da fórmula de Herão, escrita de um modo acessível aos alunos do 8.º ano de escolaridade, baseada apenas no Teorema de Pitágoras [2].

Mas acessibilidade não é o mesmo que rapidez ou facilidade de apreensão... Na aula que reportamos, optou-se por omitir a prova, de modo a conseguir-se respiração suficiente para a resolução de problemas.

Em maio de 2019, Carmeline Santos, então estudante do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário na Universidade de Coimbra, lecionou uma aula no Delfos Júnior sobre a fórmula de Herão, sob a orientação do autor deste texto. Alguns

dos exercícios e problemas da aula de novembro de 2023 tinham já sido propostos nessa aula, mas uma parte muito substancial do tempo foi gasta na demonstração da fórmula de Herão. Tendo os alunos elevada motivação, foram pacientes e sentiram-se recompensados com a conclusão da prova. Mas foi patente a sua dificuldade em não perderem o fio à meada no longo caminho percorrido, não obstante a competência da sua professora.

REFERÊNCIAS

[1] https://www.cemc.uwaterloo.ca/contests/past_contests.html.

[2] https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/areas_e_aplicacoes_em_geometria.pdf.

[3] Dirk J. Struik. *História Concisa das Matemáticas*. Gradi-va, 1989. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro

¹ Problema 3.a) da 2015 Canadian Intermediate Mathematics Contest.

² Problema 3.b) da 2015 Canadian Intermediate Mathematics Contest, cuja solução pode ser encontrada em [1].



101 101 101 101 101 101 101 101 101

NÚMEROS ONDULANTES NA FORMA 101...01

EUDES ANTONIO COSTA^a E ARTHUR BATISTA DE SOUZA^b

UFT, ARRAIAS, MATEMÁTICA^a E UFT, PROFMAT, ARRAIAS^b

eudes@uft.edu.br^a e souza.arthur@uft.edu.br^b

Nestas notas consideramos um subconjunto dos números naturais chamados *números ondulantes* abordado por Pickover e outros. Especificamente tratamos dos números *suavemente ondulantes* formados apenas pelos algarismos 1 e 0. Sabe-se que exceto 101, nenhum número deste subconjunto é primo. Aqui mostramos também que nenhum número *suavemente ondulante* formado por aqueles algarismos é um quadrado perfeito. A análise apresentada é restrita a aritmética na base decimal. A nossa procura dos primos e quadrados perfeitos nos números ondulantes é motivada pelo estudo da classe dos números repunidades, um subconjunto dos números naturais formados pela repetição da unidade; e neste encontram-se alguns primos e nenhum quadrado perfeito.

I. INTRODUÇÃO

Nestas notas consideraremos o conjunto dos números inteiros não negativos (naturais) denotado por $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, e por conveniência diremos apenas que $m \in \mathbb{Z}_+$ é um número natural. A nossa discussão aqui preocupa-se exclusivamente com a aritmética na base decimal, assim $m = a_{k-1} \dots a_1 a_0$ indica um número inteiro não-negativo com k algarismos, em que $a_{k-1}, \dots, a_0$ são números inteiros (algarismos) de 0 a 9 e $a_{k-1} \neq 0$. As propriedades aritméticas dos naturais, os conceitos de máximo divisor comum entre dois naturais a e b , não ambos nulos, denotado por $\text{mdc}(a, b)$ e a definição 2.2 constituem a base teórica para o acompanhamento deste trabalho.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: na secção 2 apresentamos um problema para motivar a definição de números *suavemente ondulantes* compostos apenas pelos

algarismos 0 e 1; na secção 3, além de variados exemplos, enunciamos os principais resultados acerca de primalidade e quadrados perfeitos dos números *suavemente ondulantes*, que serão demonstrados em subsecções separadas; enquanto na secção 4 mostramos que para um número repunidade (repetição das unidades) com uma quantidade ímpar de algarismos, existe um múltiplo suavemente ondulante compostos apenas pelos dígitos 0 e 1.

2. PRELIMINARES

Como motivação apresentamos um problema do Banco de Questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (BQ OBMEP):

Exemplo 2.1. (BQ OBMEP 2015 - Adaptada) Determine a soma do numerador e do denominador da fração irredutível que é igual a $\frac{a}{b}$, em que

$$a = \underbrace{11 \dots 11}_{2022} \text{ e } b = 2020 \dots 02,$$

em que o algarismo 2 aparece 1011 vezes alternado por 0. Veja que

$$\underbrace{11 \dots 11}_{2022} = 11 \times \underbrace{1010 \dots 0101}_{2021} \text{ e}$$

$$\underbrace{2020 \dots 02}_{1011 \text{ algarismos } 2 \text{ e } 1010 \text{ algarismos } 0} = 2 \times \underbrace{1010 \dots 0101}_{2021}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{b} = \frac{11 \times 1010 \dots 0101}{2 \times 1010 \dots 0101} = \frac{11}{2}.$$

Como $\frac{11}{2}$ é irredutível, pois $\text{mdc}(11, 2) = 1$, temos que $11 + 2 = 13$.

Definição 2.2. Diremos que o número natural m é um número *suavemente ondulante* ou *alternado* do tipo *UZ* se for formado apenas pelos dígitos (algarismos) 0 e 1 e for uma sequência alternada dos dígitos 0 e 1, iniciada por 1.

Exemplo 2.3. Os números 10, 101, 1010 e 10101010101, e o número

$$\underbrace{1010 \dots 0101}_{2021}$$

com 1011 algarismos 1 alternados por 1010 algarismos 0, que apareceu no exemplo 2.1, são exemplos de números *suavemente ondulantes* do tipo *UZ*.

De uma forma geral, seja $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ o conjunto de dígitos ou algarismos no sistema posicional decimal. Dizemos que um número natural m formado por $n > 2$ algarismos é *suavemente ondulante* ou *alternado* quando,

$$m = \underbrace{aba \cdots ab}_{n \text{ par}} \text{ ou } m = \underbrace{aba \cdots ba}_{n \text{ ímpar}}$$

com $a, b \in D$, $a \neq b$ e $a \neq 0$.

Observe que os números 3535353, 10101010101 e 9494 são *suavemente ondulantes*, conforme [1, 2, 3, 4]. Em [5] pode encontrar um estudo acerca dos números *suavemente ondulantes*, no qual se apresenta uma lista dos números primos *suavemente ondulantes* menores do que 10^{13} , para quaisquer $a \neq b$ em D .

3. RESULTADOS PRINCIPAIS

Por simplicidade (e conveniência), diremos apenas que m é um número *suavemente ondulante* do tipo UZ se $m \in UZ$. Para qualquer natural $m \in UZ$, usaremos a notação $m = uz(n)$ em que $n > 1$ indica a quantidade de dígitos (algarismos) no número *suavemente ondulante* m .

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 3.1. O número $uz(5) = 10101$, e possui três algarismos 1 alternados por dois algarismos 0. Já o número $uz(8) = 10101010$ possui quatro algarismos 1 alternados por quatro algarismos 0. Enquanto o número $uz(2022) = 1010 \dots 01010$ possui 1011 algarismos 1 alternados por 1011 algarismos 0.

Os primeiros resultados são fáceis, mas apresentamos as demonstrações para que o trabalho fique o mais autointido possível.

Proposição 3.2. [6] *Se n é par, então $uz(n)$ termina em 0, caso contrário $uz(n)$ termina em 1.*

Demonstração. Tomemos n par. Então, para algum $k \in \mathbb{Z}_+$ temos $n = 2k$, bastando agora ver que $uz(n) = uz(2k)$ é da forma

$$\begin{aligned} uz(2k) &= \underbrace{10 \ 10 \ \cdots \ 10}_{k \text{ vezes}} \\ &= 10 \cdot \left(\underbrace{101 \dots 101}_{2k-1 \text{ algarismos}} \right) \\ &= uz(2k-1) \cdot 10. \end{aligned} \quad (3.1)$$

De igual modo, para n ímpar temos

$$uz(2k+1) = \underbrace{10 \ 10 \ \cdots \ 10}_{k \text{ vezes}} 1.$$

E obtemos o resultado. $\square$

Dados os naturais n, k_1 e k_2 tais que $k_1 + k_2 = n$, seja $uz(n)$ um número *suavemente ondulante* com k_1 algarismos 1 alternados por k_2 algarismos 0 e escrevemos $uz(n) = 1_{k_1}0_{k_2}$. Segue da proposição 3.2 o seguinte resultado.

Corolário 3.3. *Se $n = 2k$ é par, então a quantidade de algarismos 1 e 0 em $uz(n)$ é igual e $uz(n) = 1_k0_k$.*

Demonstração. Utilizando indução sobre k . Para $k = 1$, temos $uz(2) = 10$, que tem um algarismo 1 e um algarismo 0, o que é verdadeiro. Suponhamos que para algum k tenhamos $uz(2k) = 1_k0_k$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 100 e adicionando 10, obtemos: $uz(2k+2) = uz(2k) \cdot 100 + 10 = (1_k0_k) \cdot 100 + 10$, como $uz(2) = 10$, podemos reescrever a igualdade da forma:

$$\begin{aligned} uz(2(k+1)) &= uz(2k+2) = uz(2k) \cdot 100 + uz(2) \\ &= (1_k0_k) \cdot 10^2 + 10 \\ &= 1_{k+1}0_{k+1}. \end{aligned}$$

O que garante que a asserção é verdadeira para $k+1$. Logo, obtemos que ela é válida para todo o k natural. $\square$

Corolário 3.4. *Se $n = 2k+1$ é ímpar, então, em $uz(n)$, a quantidade de algarismos 1 é $k+1$ e a de algarismos 0 é k , ou seja, em $uz(n) = 1_{k+1}0_k$.*

Demonstração. Como $uz(2k+1) = uz(2k) \cdot 10 + 1$, temos, então, do corolário 3.3, que a quantidade de algarismos 1 e de algarismos 0 é igual a k , em $uz(2k+1)$ será então acrescentado um algarismo 1, logo $uz(n) = 1_{k+1}0_k$. $\square$

Lembramos que um número natural m é um *quadrado perfeito* se existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $m = b^2$. O nosso principal resultado é mostrar o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é um quadrado perfeito.*

Apresentaremos uma demonstração do teorema 3.5 na seção 3.3.

Exemplo 3.6. Por inspeção direta nos divisores dos seis primeiros números suavemente ondulantes UZ , obtemos que:

1. O número $uz(2) = 10 = 2 \cdot 5$ não é primo.
2. O número $uz(3) = 101$ é **primo**.
3. O número $uz(4) = 1010 = 10 \cdot 101$ não é primo.
4. O número $uz(5) = 10101 = 111 \cdot 91$ não é primo.
5. O número $uz(6) = 101010 = 10 \cdot 10101$ não é primo.
6. O número $uz(7) = 1010101 = 101 \cdot (10^4 + 1)$ não é primo.

No exemplo 3.6 listamos apenas uma fatorização, quando o número $uz(n)$ é composto. Outro resultado interessante acerca dos números suavemente ondulantes $uz(n)$ é o seguinte:

Teorema 3.7. [6, Teorema 5] *Exceto 101, nenhum número ondulante $uz(n)$ é primo.*

Na próxima secção apresentaremos uma demonstração adaptada de [6]. Aqui este resultado vai ser-nos útil para demonstrarmos o teorema 3.5.

Em complemento ao exemplo 3.6, apresentamos também a tabela 1, com os números suavemente ondulantes $uz(n)$ e alguns fatores para n ímpar, com $5 \leq n \leq 21$.

3.1 Demonstração do Teorema 3.7

Segue da proposição 3.2 que o número suavemente ondulante $uz(2k)$ é múltiplo de 10 (par e múltiplo de 5) e portanto não é primo, justificando a seguinte propriedade:

Proposição 3.8. *Nenhum número suavemente ondulante $uz(2k)$ é primo.*

Para mostrarmos o caso em que n é ímpar, no número suavemente ondulante $uz(n)$, vamos precisar de mais ferramentas. Mas antes, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 3.9. Para qualquer x natural, temos que

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1.$$

De facto, vejamos

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) &= ((x^2 + 1) + x)((x^2 + 1) - x) \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 - x^2 \\ &= x^4 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

Podemos generalizar essa ideia usando três somas de progressões geométricas (PG). Para quaisquer x e $q \geq 1$ natural a seguinte igualdade ocorre:

$$\begin{aligned} &(x^{2q} + x^{2q-1} + x^{2q-2} + \dots + x^2 + x + 1) \times \\ &\times (x^{2q} - x^{2q-1} + x^{2q-2} - \dots + x^2 - x + 1) = \\ &= \frac{x^{2q+1} - 1}{x - 1} \cdot \frac{x^{2q+1} + 1}{x + 1} = \frac{x^{4q+2} - 1}{x^2 - 1} = \\ &= x^{4q} + x^{4q-2} + \dots + x^2 + 1. \end{aligned}$$

Isto prova o seguinte resultado:

Tabela 1. Fatores.

n	$uz(n)$	Fatorização
5	$1_3 0_2$	$111 \times (10^2 - 10 + 1)$
7	$1_4 0_3$	$101 \times (10^4 + 1)$
9	$1_5 0_4$	$11111 \times (10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
11	$1_6 0_5$	$10101 \times (10^6 + 1)$
13	$1_7 0_6$	$1111111 \times (10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
15	$1_8 0_7$	$1010101 \times (10^8 + 1)$
17	$1_9 0_8$	$111111111 \times (10^8 - 10^7 + 10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$
19	$1_{10} 0_9$	$101010101 \times (10^{10} + 1)$
21	$1_{11} 0_{10}$	$11111111111 \times (10^{10} - 10^9 + 10^8 - 10^7 + 10^6 - 10^5 + 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$

Lema 3.10. [6] Para quaisquer x e $q \geq 1$ natural, a seguinte igualdade ocorre:

$$\begin{aligned} x^{4q} + x^{4q-2} + \dots + x^2 + 1 &= \\ &= (x^{2q} + x^{2q-1} + x^{2q-2} + \dots + x^2 + x + 1) \times \\ &\times (x^{2q} - x^{2q-1} + x^{2q-2} - \dots + x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Agora estamos em condições de apresentar a seguinte proposição:

Proposição 3.11. Nenhum número suavemente ondulante $uz(n)$ é primo, com $n > 3$ ímpar.

Demonstração. O caso em que n é ímpar será feito considerando dois casos, visto que $n > 3$ ímpar acarreta que existe um natural $q > 0$, tal que $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$.

Caso tenhamos $n = 4q + 1$, segue do lema 3.10, fazendo $x = 10$, que $uz(n)$ não é primo, visto que

$$\begin{aligned} uz(n) &= 10^{4q} + 10^{4q-2} + \dots + 10^2 + 1 \\ &= (10^{2q} + 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 10 + 1) \\ &\quad (10^{2q} - 10^{2q-1} + 10^{2q-2} - \dots + 10^2 - 10 + 1). \end{aligned}$$

Já no caso em que $n = 4q + 3$, o algarismo 0 ocupa a posição central, e assim escrevemos $n = 2k + 1$ para algum natural k ímpar. Bastando agora ver que

$$\begin{aligned} uz(n) &= \underbrace{101 \dots 01}_k \text{ dígitos} \underbrace{0101 \dots 01}_k \text{ dígitos} \\ &= uz(k) 0 uz(k) \\ &= uz(k) \cdot 10^{k+1} + uz(k) \\ &= uz(k) \cdot (10^{k+1} + 1). \end{aligned}$$

Logo $uz(k)$ é um divisor de $uz(2k + 1)$.

Em ambos os casos obtemos que $uz(n)$ não é primo, quando n é ímpar. $\square$

O teorema 3.7 é consequência direta das proposições 3.8 e 3.11.

3.2 Nenhum número repunidade é um quadrado perfeito

Para demonstrarmos o teorema 3.5, necessitamos de um resultado correlato sobre os números repunidades.

Os números repunidades (repetição da unidade) formam um subconjunto dos naturais, apresentando um padrão e algumas propriedades bem definidas, as quais

despertam o interesse de matemáticos. O termo repunidade refere-se aos números naturais R_n que são escritos de forma única, no sistema decimal, com a repetição da unidade, ou seja, a justaposição do algarismo 1 n vezes. Assim, para todo o $n \geq 1$, $R_1 = \{1, 11, 111, 1111, \dots, R_n, \dots\}$ representa o conjunto dos números repunidades, veja [7, 8, 9]. Em língua portuguesa, um estudo e propriedades adicionais sobre as repunidades podem ser consultados em [10, 11, 12].

Proposição 3.12. [11, Proposição 9], [13, Problema 3.32] Exceto $R_1 = 1$, nenhum outro R_n é um quadrado perfeito.

Demonstração. Aqui utilizaremos o seguinte facto: um quadrado perfeito é da forma $4q$ (par) ou $4q + 1$ (ímpar), e portanto nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4q + 3$, que pode ser consultado em [13].

Para $n \geq 2$ temos:

$$R_n = \underbrace{111 \dots 111}_n \text{ algarismos} = 10^2 (\underbrace{111 \dots 1}_{n-2} \text{ algarismos}) + 11.$$

Como 4 divide 10^2 , e $11 = 4 \times 2 + 3$, obtemos que $R_n = 4q + 3$, para algum inteiro não negativo q . Como nenhum quadrado perfeito pode ser da forma $4q + 3$, então podemos concluir que, exceto R_1 , nenhum outro número repunidade será quadrado perfeito. $\square$

3.3 Demonstração do teorema 3.5

Nesta secção, para o caso em que n é ímpar vamos utilizar o clássico resultado conhecido como algoritmo de Euclides que determina o máximo divisor comum entre dois números inteiros.

Lema 3.13. [13, Algoritmo de Euclides] Dados os inteiros a , b , com $b = aq + r$ para q e $0 \leq r < |b|$ inteiros. O máximo divisor comum entre a e b é dado por

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, r).$$

Para mostrar isso, deve-se provar que o conjunto dos divisores positivos comuns de a e b é o mesmo conjunto dos divisores positivos comuns de b e r , e portanto seus máximos também são iguais, o que deixamos como desafio ao leitor (ou consultar [13]). O Algoritmo de Euclides consiste na aplicação reiterada do lema acima. Como os restos formam uma sequência estritamente decrescente, o algoritmo para quando atingimos o resto 0. Se o mdc de dois números é igual a 1, dizemos que os números são coprimos ou primos entre si.

Ao modo da secção 3.1, vamos separar em dois casos, n par ou ímpar. E o teorema 3.5 será uma consequência direta dos próximos resultados.

Proposição 3.14. *Nenhum número ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para n par.*

Demonstração. Para todo o natural par $n > 1$ existe um natural $k > 0$, tal que, $n = 2k$. Segue da proposição 3.2 que $uz(2k)$ termina em 0, portanto $uz(2k)$ é par e se for um quadrado perfeito, será da forma $4q$ para algum inteiro q . Da equação 3.1 temos que $uz(2k) = uz(2k-1) \times 10$. E assim 10 é fator do número $uz(2k)$, e novamente pela proposição 3.2, segue que $10 = 2 \cdot 5$ (nem 2 e nem 5) não é fator de $uz(2k-1)$, pois $uz(2k-1)$ é ímpar terminando em 1. Logo, nenhum $uz(2k)$ é quadrado perfeito. $\square$

Para organizar e facilitar a leitura, o caso em que n é ímpar será feito considerando dois subcasos, $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$. Em ambos, vamos mostrar que os fatores dados na proposição 3.11 são coprimos.

Proposição 3.15. *Nenhum número ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para n ímpar da forma $n = 4q + 1$.*

Demonstração. Tomemos $n = 4q + 1$, pela proposição 3.11 temos que $uz(n)$ não é primo, e temos a fatorização

$$uz(n) = (10^{2q} + 10^{2q-1} + \dots + 10 + 1) \times (10^{2q} - 10^{2q-1} + \dots - 10 + 1).$$

Vamos mostrar que o

$$\text{mdc}(10^{2q} + 10^{2q-1} + \dots + 10 + 1, 10^{2q} - 10^{2q-1} + \dots - 10 + 1) = 1.$$

Pelo Algoritmo de Euclides (lema 3.13), temos que

$$\begin{aligned} & \text{mdc}(10^{2q} + 10^{2q-1} + \dots + 10 + 1, \\ & \quad 10^{2q} - 10^{2q-1} + \dots - 10 + 1) \\ &= \text{mdc}(10^{2q} - 10^{2q-1} + \dots - 10 + 1, \\ & \quad 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 2 \cdot 10) \\ &= \text{mdc}(10 \cdot 10^{2q-1} - 10 \cdot 10^{2q-2} + \dots - 10 + 1, \\ & \quad 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 2 \cdot 10). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 10^{2q-1} + 9 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 9 \cdot 10 + 1 \\ &= 4 \cdot (2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 2 \cdot 10) + \\ & \quad + 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 + 1. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} & \text{mdc}(10 \cdot 10^{2q-1} - 10 \cdot 10^{2q-2} + \dots - 10 + 1, \\ & \quad 2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 10) \\ &= \text{mdc}(2 \cdot 10^{2q-1} + 2 \cdot 10^{2q-3} + \dots + 2 \cdot 10, \\ & \quad 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 + 1) \\ &= \text{mdc}(10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 + 1, \\ & \quad 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 - 1). \end{aligned}$$

Veja que os números $10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 + 1$ e $10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 - 1$ são ímpares consecutivos, assim

$$\begin{aligned} & \text{mdc}(10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 + 1, \\ & \quad 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 - 1) = 1. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} & \text{mdc}(10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 + 1, \\ & \quad 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10 - 1) = 1, \end{aligned}$$

concluimos que os fatores do número ondulante $uz(4q + 1)$ não possuem fatores em comum e sendo o primeiro fator uma *repunidade* maior do que 1, a qual pela proposição 3.12 não é um quadrado perfeito, obtemos que $uz(4q + 1)$ não é um quadrado perfeito. $\square$

Proposição 3.16. *Nenhum número ondulante $uz(n)$ é quadrado perfeito, para o número n ímpar da forma $n = 4q + 3$.*

Demonstração. Temos $n = 4q + 3$, novamente pela proposição 3.11 temos que $uz(n)$ não é primo, reescrevendo $n = 2k + 1$, obtemos a fatorização

$$\begin{aligned} uz(n) &= uz(2k + 1) \\ &= (10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1)(10^{2q+2} + 1). \end{aligned}$$

Primeiro, veja que

$$\begin{aligned} & (10^2 - 1)(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1) \\ &= 10^{2q+2} + 10^2 \cdot 10^{2q-2} + \dots + 10^2 \cdot 10^2 + \\ & \quad + 10^2 - 10^{2q} - 10^{2q-2} - \dots - 10^2 - 1 \\ &= 10^{2q+2} + 10^{2q} + \dots + 10^4 + 10^2 - 10^{2q} - \\ & \quad - 10^{2q-2} - \dots - 10^4 - 10^2 - 1 \\ &= 10^{2q+2} - 1. \end{aligned}$$

Como $10^{2q+2} + 1 = (10^{2q+2} - 1) + 2$, outra vez pelo Algoritmo de Euclides (lema 3.13), segue que

$$\begin{aligned} & \text{mdc}(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1, 10^{2q+2} + 1) \\ &= \text{mdc}(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1, 2). \end{aligned}$$

Como o número $10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1$ é ímpar, temos que $\text{mdc}(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1, 2) = 1$.

Como $\text{mdc}(10^{2q} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 1, 2) = 1$, concluímos que os fatores do número ondulante $uz(4q+3)$ não possuem fatores em comum e sendo o primeiro fator um número ondulante $uz(4q+1)$, o qual pela proposição 3.15 não é um quadrado perfeito, obtemos que $uz(4q+3)$ não é um quadrado perfeito. $\square$

4. MAIS RESULTADOS

Dados os números a e b , dizemos que b é um divisor de a , ou a é múltiplo de b , se existir um número c tal que $a = b \cdot c$.

O próximo resultado mostra uma relação entre os números suavemente ondulantes e os números repunidades.

Proposição 4.1. *Se $n = 4q + 1$ então $uz(n)$ é múltiplo de R_{2q+1} .*

Demonstração. No lema 3.10, fazendo $x = 10$, basta ver que

$$R_{2q+1} = 10^{2q} + 10^{2q-1} + 10^{2q-2} + \dots + 10^2 + 10 + 1.$$

$\square$

E mais, observando a tabela 1, constatamos $uz(5)$, $uz(6)$, $uz(9)$ e $uz(11)$ são também múltiplos de 3. De uma forma geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.2. *Se $n = 3k$ é par ou $n = 3k + 2$ é ímpar então $uz(n)$ é múltiplo de 3.*

Demonstração. Basta observar que no primeiro caso a quantidade de algarismos 1 é o inteiro $\frac{3k}{2}$, enquanto no segundo caso é $\frac{3(k+1)}{2}$. Portanto, nos dois casos a quantidade de dígitos 1 também é múltipla de 3. $\square$

O mesmo argumento é válido para 9, e de modo similar para qualquer outra potência de 3.

Proposição 4.3. *Se $n = 9k$ é par ou $n = 9k + 8$ é ímpar então $uz(n)$ é múltiplo de 9.*

Agora vamos apresentar uma definição um pouco mais geral do que a definição 2.2.

Definição 4.4. *Diremos que o número ondulante m é do tipo AZ se for formado apenas pelos dígitos 0 e a e for uma sequência alternada dos dígitos 0 e a , iniciada por a , com $a \in \{1, 2, \dots, 8, 9\}$.*

Exemplo 4.5. Os números 10, 202, 3030, 20202 e 404040404 são exemplos de números ondulantes do tipo AZ.

O seguinte resultado, cuja demonstração se deixa como desafio, é consequência do teorema 3.7.

Proposição 4.6. *Se $a \neq 1$ e $n \geq 2m$ então nenhum número suavemente ondulante $az(n)$ é primo.*

Por fim, o resultado seguinte é uma consequência do teorema 3.5. Fica como desafio provar que:

Proposição 4.7. *Nenhum número suavemente ondulante $az(n)$ é quadrado perfeito, para $n \geq 2$.*

5. CONSIDERAÇÕES

Uma abordagem sobre divisores, múltiplos e decomposição em fatores primos de um número inteiro ou natural pode ser feita na forma de desafio ou do estudo de propriedades aritméticas. Uma apresentação sobre alguns subconjuntos, tais como números ondulantes ou repunidades pode ser abordada num contexto de matemática recreativa ou com estudantes olímpicos. Nas várias possibilidades, o conhecimento específico, aliado ao fascínio que os números primos sempre despertam, pode ser utilizado tanto para fixar melhor o conteúdo ou assunto, quanto para despertar no estudante o gosto por problemas desafiadores em Teoria dos Números. Aqui compartilhamos o nosso estudo provocado pela conversa entre os autores, durante a disciplina de Aritmética (PROFMAT), que despertou a curiosidade sobre a existência (ou não) de primos ou quadrados perfeitos no conjunto de números suavemente ondulantes do tipo UZ. Apresentamos também tais questões a estudantes de matemática e esperamos assim despertar o gosto pelos números, bem como observar padrões, que são duas características típicas de um matemático.

REFERÊNCIAS

[1] Pickover, Clifford A. "Is There a Double Smoothly Undulating Integer?". *Journal of Recreational Mathematics*, v. 22, n. 1, pp. 52-53, 1990.