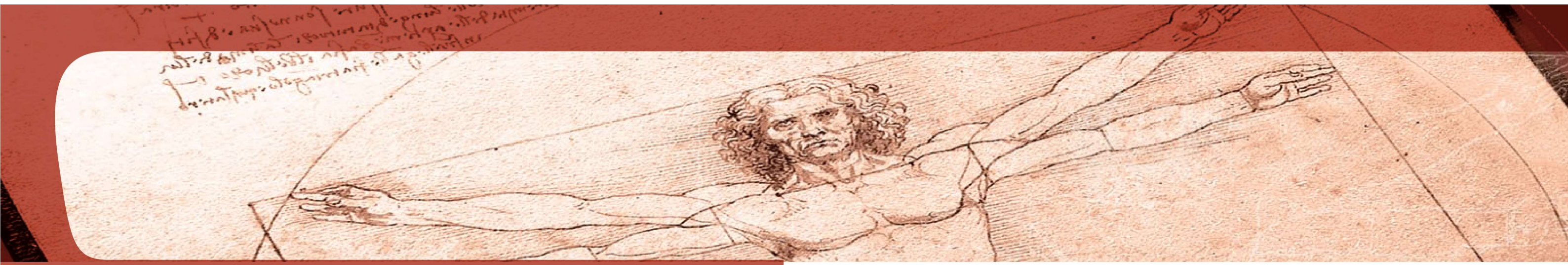

PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt

ARTE E RAZÃO DE OURO
PARTE 1

A razão de ouro é um elemento matemático que associamos habitualmente à beleza e à arte. De onde vem esta ideia?

Quando se fala de matemática e arte, provavelmente uma das primeiras coisas que nos vêm à cabeça é a razão de ouro, e a sua eventual presença em pinturas, especialmente renascentistas. No entanto, esta ideia tem pouco fundamento. Numa série de dois artigos, vamos tentar perceber como veio a associar-se um significado estético a esta proporção.

Comecemos pela definição. Dizemos que dois números positivos, a e b, estão na razão de ouro se

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Podemos encarar esta igualdade como a afirmação de que a sucessão b, a, $a+b$ é uma progressão geométrica. Habitualmente, a relação algébrica é ilustrada com a divisão de um segmento, como vemos na figura 1.

Figura 1: Razão de ouro.

A razão de ouro tem várias propriedades geométricas interessantes, tendo relações com o pentágono estrelado, o hexágono inscrito numa circunferência, o icosaedro e o dodecaedro. Estas propriedades fascinaram várias personalidades ao longo da História, como vamos ver.

A razão de ouro é mencionada nos *Elementos* de Euclides, livro 2, proposição 11: "Cortar um segmento de reta dado de modo que o retângulo contido pelo todo e por um dos segmentos seja igual ao quadrado do segmento restante." Pondo em equação, fica $(a+b)b = a^2$, equivalente à equação definidora da razão de ouro.

Ainda nos *Elementos*, esta secção volta a ser mencionada nos seguintes contextos:

- Livro 4, proposições 10 e 11: Construção de um triângulo isósceles de ouro e pentágono regular.
- Livro 6, definição 2: Define média e extrema razão (o conceito de proporção só é definido no livro 5), uma terminologia que iria permanecer como designação da razão de ouro, e que adotaremos também.
- Livro 13, proposições 16 e 17: Construção do icosaedro e do dodecaedro, com base nas proposições do livro 4.

Na primeira edição em latim dos *Elementos*, no século 13, o editor, Campanus de Novara, faz o seguinte comentário à divisão em média e extrema razão:

> "Maravilhoso, portanto, é o poder de uma linha dividida de acordo com uma razão que tem média e dois extremos: como a maioria das coisas dignas da admiração dos filósofos concorda com ela, essa base ou preeminência procede da natureza invariável das fundações superiores, que uma certa harmonia possa racionalmente unir sólidos tão diversos, primeiro em grandeza, depois no número de bases, depois também em sua forma irracional."

Campanus destaca a aplicação desta razão à construção do icosaedro e do dodecaedro, e também o facto de ser um número irracional.

Em 1509, Luca Pacioli publica uma das suas obras mais famosas, a *Divina Proportione*, em que aplica o adjetivo "divina" a uma construção que até agora estava apenas relacionada com construções de geometria euclidiana. Pacioli, no prólogo da obra, dá quatro razões para esta designação.

1. Esta proporção (razão) é uma e nada mais do que uma. Segundo toda a escola teológica e filosófica, esta unidade é o próprio epíteto de Deus.

2. Correspondência com a Santíssima Trindade. Como *in divinis* há uma mesma substância entre três pessoas, isto é, Pai, Filho e Espírito Santo, da mesma forma, uma mesma proporção (razão) deste tipo pode sempre ser encontrada entre três termos.

3. Como Deus não pode ser definido e nem compreendido por palavras, também este tipo de proporção não pode ser determinado por número inteligível, nem ser representado por número racional.

4. Assim como Deus não pode mudar, e é tudo em todos e está em toda a parte, esta proporção também é invariável em toda a quantidade.

Como vemos, todas as justificações comparam propriedades da média e extrema razão com atributos de Deus, ou seja, a justificação para a exaltação desta construção é ainda centrada na matemática.

O livro *Divina Proportione* tem três partes: a primeira, dedicada à média e extrema razão, a segunda, um tratado de arquitetura que discute a obra de Vitrúvio, e a terceira, uma tradução para italiano do livro de Piero della Francesca, em latim, sobre os cinco corpos regulares. Notamos apenas que, tal como em Vitrúvio, não há no tratado de arquitetura qualquer referência à razão de ouro, sendo todas as proporções apresentadas racionais.

Também Kepler mostrou um interesse especial pela divisão de um segmento em média e extrema razão. É conhecida a sua afirmação seguinte.

> "A Geometria tem dois grandes tesouros. Um é o teorema de Pitágoras, o outro, a divisão de uma linha na média e extrema razão."

Numa carta a Tanckius (um amigo com quem partilhava a paixão da alquimia), Kepler é mais específico, pondo em evidência alguns motivos para este destaque.

> "Entre as proporções contínuas[1], existe um tipo particularmente excelente: a proporção divina, quando das três quantidades as duas menores somadas somam a maior quantidade.
> Eu acredito que essa proporção geométrica serviu de ideia ao Criador quando ele introduziu a criação de semelhança a partir de semelhança, que também continua indefinidamente. Vejo o número cinco em quase todas as flores que abrem caminho para um fruto, isto é, para a criação que existe, não por si, mas pelo fruto a seguir. Quase todas as flores das árvores podem ser incluídas aqui [...]. Mas na geometria, o número cinco, que é o pentágono, é construído por meio da proporção divina que desejo (ou suponho) ser o protótipo para a criação."

Kepler faz assim uma referência à relação entre a média e extrema razão e a Natureza criada, concretizada aqui na botânica. Porém, mais adiante, apresenta outra proximidade à Natureza, agora a um nível astronómico. Kepler vai referir-se ao modelo cosmológico apresentado no seu livro *Mysterium Cosmographicum*, de 1597, ver figura 2.

Neste modelo, as órbitas dos planetas aparecem situadas em esferas, que são sucessivamente inscritas e circunscritas aos cinco sólidos platónicos, na ordem indicada na figura. Kepler obtém assim uma relação proporcional entre os raios das órbitas dos vários planetas, determinada pelos sólidos platónicos. Ora, sucede que os sólidos que aparecem junto à órbita da Terra são o icosaedro (inscrito) e o dodecaedro (circunscrito), que são justamente os dois sólidos que incluem, na sua construção, uma referência à média e extrema razão. Escreve então Kepler o seguinte na mesma carta.

> "Além disso, existe entre o movimento do Sol (ou, como eu acredito, da Terra) e o de Vénus, que está no topo da capacidade de geração, a proporção de 8 a 13, que, como iremos ver, está muito perto da proporção divina.
> Por fim, de acordo com Copérnico, a esfera terrestre está a meio caminho entre as esferas de Marte e Vénus. Obtém-se entre eles a proporção do dodecaedro e do icosaedro, que na geometria são ambos derivados da proporção divina; é na nossa Terra, no entanto, que o ato procriativo ocorre."

Há assim uma referência aos sólidos platónicos que têm

[1] Isto é, progressões geométricas.

[2] Fonte: Domínio público, via *https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kepler_Platonic_Solids.tif*.

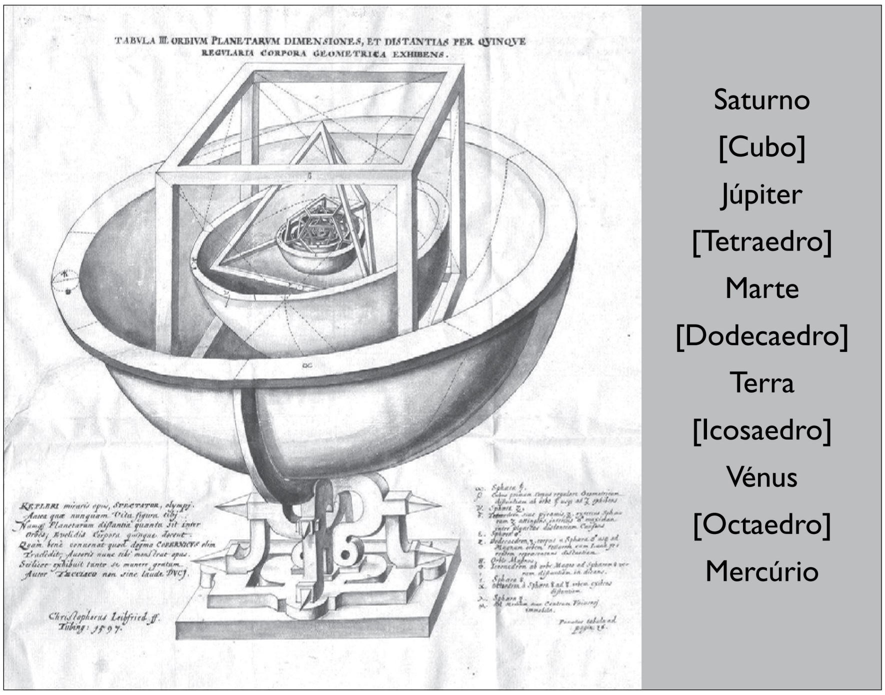

Figura 2: Modelo do sistema solar segundo o *Mysterium Cosmographicum* de Kepler.[2]

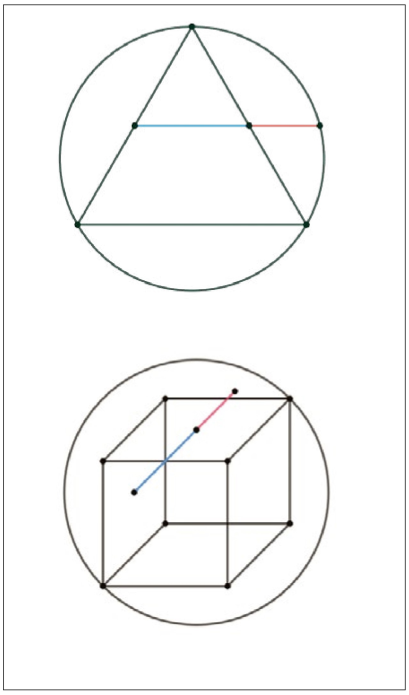

Figura 3: Duas ocorrências da razão de ouro.

uma proximidade especial com a razão de ouro, aqui num contexto de uma descrição cosmológica, associada à vida que apenas existe na Terra.

Vemos assim que, até ao Século 16, o destaque dado à "média e extrema razão" continha sempre referências às suas propriedades matemáticas, ainda que se lhe associassem significados não matemáticos, místicos ou religiosos. No entanto, não encontrámos referências a relações com a arte. No próximo texto veremos que, no Século 19, a situação mudará.

Para já, deixamos aqui, na figura 3, duas construções geométricas em que surge a razão de ouro, algo inesperadamente, que convidamos os leitores a analisar. Estas duas construções são devidas ao geómetra amador George Odom (do Século 20). Na primeira, os extremos do segmento azul são os pontos médios dos lados do triângulo equilátero, na segunda, os extremos do segmento azul são centros das faces do cubo, o outro extremo do segmento vermelho está na esfera circunscrita ao cubo[3]. Em ambos os casos, o segmento colorido está dividido na razão de ouro.

[3] Para demonstrar a ocorrência da razão de ouro nestas figuras, é útil (mas não necessário) saber o teorema relativo a duas cordas de circunferência que se intersetam, por vezes chamado a potência de um ponto.

REFERÊNCIAS

[1] Mario Livio, *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most aAstonishing* Number. Broadway Books, 2002.

[2] Roger Herz-Fischler, *A Mathematical History of the Golden Number*. Dover, 1998.

[3] *The Golden Section in the Nexus Network Journal*, Nexus, 2002.

Coordenação do espaço ARTE E MATEMÁTICA:
Pedro J. Freitas, Universidade de Lisboa, *pjfreitas@fc.ul.pt*