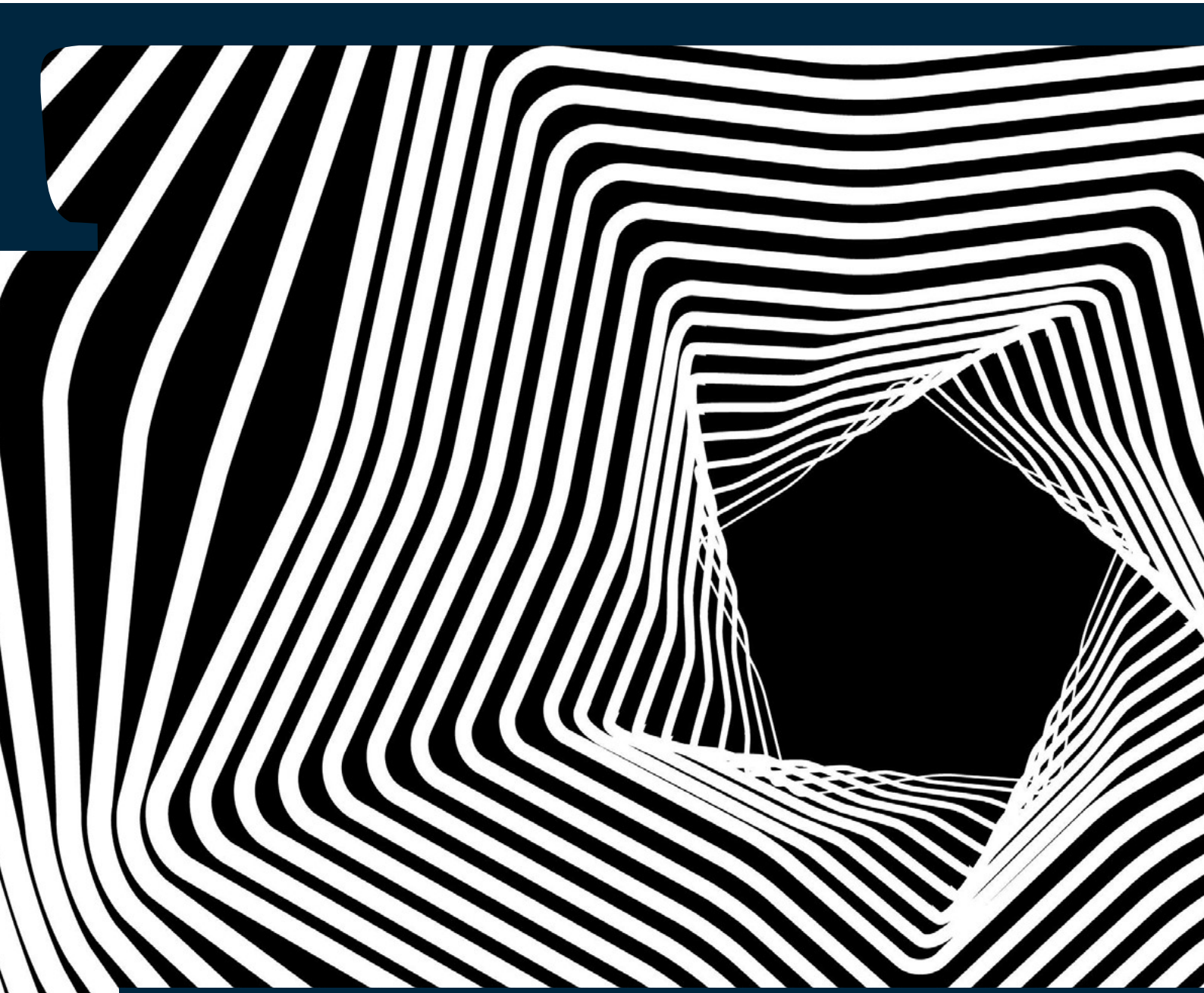

AGULHAS, ONDAS E MAGIA

Gonçalo Jorge[a] e Diogo Oliveira e Silva[b]
Associação Portuguesa de Ilusionismo[a] e Instituto Superior Técnico[b]
goncalo_jorge@hotmail.com[a] e diogo.oliveira.e.silva@tecnico.ulisboa.pt[b]

1. INTRODUÇÃO

Um *teorema do ponto fixo* é um resultado matemático que garante que, sob determinadas condições, uma dada função tem pelo menos um ponto fixo. Por outras palavras, se $f : X \to X$ é uma função de um certo tipo, então existe um elemento x de X tal que $f(x) = x$. Apesar da sua aparente simplicidade, teoremas do ponto fixo podem ser surpreendentemente poderosos. O propósito deste artigo é ilustrar esta afirmação com algumas aplicações inesperadas. Pelo caminho, iremos rodar agulhas, decompor ondas e pasmar-nos com alguns truques de magia.

Um dos mais conhecidos e versáteis teoremas do ponto fixo foi provado por L. E. J. Brouwer [6] em 1911. Sendo $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| \leq r\}$ uma qualquer bola fechada de centro x_0 e raio r em $\mathbb{R}^d$, o teorema do ponto fixo de Brouwer garante que toda a função contínua $f : B \to B$ tem pelo menos um ponto fixo. Como consequência quase imediata, se abrirmos um mapa de Portugal em algum lugar do País, então necessariamente existe um ponto do mapa que efetivamente se encontra na sua posição correta.

Uma variante particularmente elegante do teorema de Brouwer para funções definidas na esfera unitária $\mathbb{S}^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$ aparece num artigo de K. Borsuk [4] de 1933, em que se atribui a formulação do problema a S. Ulam; no entanto, L. Lyusternik e L. Shnirel'man [24] já tinham apresentado uma versão análoga em 1930.

Apesar da sua aparente simplicidade, teoremas do ponto fixo podem ser surpreendentemente poderosos. O propósito deste artigo é ilustrar esta afirmação com algumas aplicações inesperadas. Pelo caminho, iremos rodar agulhas, decompor ondas e pasmar-nos com alguns truques de magia.

Teorema 1. (Borsuk-Ulam) *Se $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ é uma função contínua, então existe $x \in \mathbb{S}^d$ tal que $f(-x) = f(x)$.*

O caso unidimensional ($d = 1$) do teorema de Borsuk-Ulam decorre facilmente do teorema do valor intermédio. O caso bidimensional ($d = 2$) admite a seguinte interpretação física: existe sempre um par de pontos antípodas à superfície terrestre que estão *exatamente* à mesma temperatura e à mesma pressão (assumindo que ambas as quantidades variam de forma contínua no espaço).

A *análise harmónica* estuda fenómenos oscilatórios como as soluções da equação da onda. É uma área de grande destaque no panorama atual da investigação matemática, com resultados dramáticos em áreas tão diversas como geometria combinatória [34], teoria analítica dos números [5] e até computação quântica [27]. Por outro lado, o teorema de Borsuk-Ulam tem vindo a ocupar uma posição de relevo na análise harmónica moderna, e isto é parte da motivação para as próximas duas secções deste artigo.[1]

A quarta e última secção ilustra outra faceta, ainda mais mágica, do teorema de Borsuk-Ulam. Para outras interpretações, generalizações e aplicações de Borsuk-Ulam, recomendamos vivamente o livro [26].

2. AGULHAS

Em 1917, o matemático japonês S. Kakeya [8] colocou a seguinte questão: *Quão pequena pode ser uma região do plano* onde é possível virar uma agulha de comprimento unitário por um ângulo de 180 graus, exclusivamente por rotações e translações? Uma tal região é designada por *conjunto de Kakeya planar*. Eis duas tentativas de simples execução:

- Um disco de raio igual a $\frac{1}{2}$ tem área $\frac{\pi}{4} = 0.785\ldots$
- Um triângulo equilátero de altura 1 tem $\frac{2}{\sqrt{3}}$ de lado, e área igual a $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577\ldots$

J. Pál [28] demonstrou em 1921 que, na classe dos conjuntos *convexos*, não é possível bater o triângulo equilátero. E se o conjunto não for convexo? Uma *deltoide* é a trajetória descrita por um ponto de uma circunferência à medida que esta rola, sem deslizar, dentro de outra circunferência de raio três vezes maior. Durante algum tempo, conjeturou-se que o interior de uma deltoide corresponderia

[1] Como complemento de leitura, sugerimos os artigos de divulgação de I. Łaba [23] e T. Tao [33].

à solução do problema de Kakeya. A realidade, porém, é bem diferente.

A. S. Besicovitch [2] trabalhava na mesma altura (na Rússia, em quase completo isolamento) num problema da teoria de integração de Riemann. Conseguiu reduzir o problema à existência de um subconjunto do plano de área *zero* contendo um segmento de reta unitário em cada direção. E depois construiu um tal conjunto, o que teve consequências imediatas para o problema de Kakeya.

Teorema 2. (Besicovitch). *Dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um conjunto de Kakeya planar de área inferior a ε.*

Dado que é impossível virar um segmento unitário dentro de um conjunto de área zero, o teorema 2 implica que não existe um conjunto de Kakeya de área mínima.

A construção de Besicovitch foi mais tarde modificada e simplificada por O. Perron [29] e I. J. Schoenberg [30], mas todas as variações partem essencialmente de duas ideias fundamentais.

Primeira ideia: Um triângulo equilátero de altura 1 contém um segmento de reta unitário que aponta em cada uma das direções possíveis num arco de 60 graus. Podemos dividir o triângulo em duas regiões, e deslizar uma delas por forma a garantir uma sobreposição considerável na nova figura, mas de tal modo que as direções abrangidas permaneçam as mesmas; cf. figura 1.

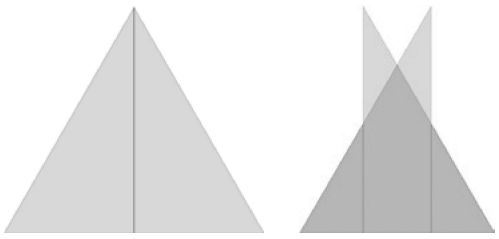

Figura 1. Deslizar, mantendo as direções mas reduzindo a área.

Segunda ideia: Iterar a primeira ideia, notando que as direções abrangidas se mantêm inalteradas; cf. figura 2.

Para implementar as duas ideias, partimos de um *triângulo mãe* e produzimos uma nova figura com um *coração* (escurecido, na figura 1) e dois *braços*. Seja δ o quociente entre o deslocamento e o comprimento da base do triângulo mãe. Se A denotar a área do triângulo mãe, então por semelhança de triângulos temos que

$$\text{área(coração)} = (1-\delta)^2 A, \text{ e } \text{área(braços)} = 2\delta^2 A.$$

Repetindo o procedimento, a área da figura resultante após n passos é, no máximo, igual à soma das áreas dos braços em cada um dos n passos acrescida da área do coração no último passo, ou seja,

$$\left(2\delta^2 + 2\delta^2(1-\delta)^2 + \ldots + 2\delta^2(1-\delta)^{2(n-1)} + (1-\delta)^{2n}\right) A,$$

o que pode ser *majorado* por A vezes

$$2\delta^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1-\delta)^{2k} + (1-\delta)^{2n} = \frac{2\delta^2}{1-(1-\delta)^2} + (1-\delta)^{2n} = \frac{2\delta}{2-\delta} + (1-\delta)^{2n}.$$

Podemos tornar esta última quantidade arbitrariamente pequena. De facto, se $\varepsilon > 0$ é um número minúsculo, escolha-se $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\frac{2\delta}{2-\delta} < \frac{\varepsilon}{2}$, ou seja, garantindo que os deslocamentos são suficientemente pequenos em relação ao comprimento da base do triângulo mãe. De seguida, escolhe-se n suficientemente grande por forma a garantir que $(1-\delta)^{2n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, a área da figura resultante após n passos é menor do que ε, aquele número minúsculo do qual partimos. Nas palavras de E. M. Stein [31, Ch. X §1], acabámos de construir um "monstro com muitos braços e um coração diminuto".

Para concluir o esboço da prova do teorema 2, convém elucidar dois detalhes finais. Em primeiro lugar, não é claro que um segmento unitário possa ser virado den-

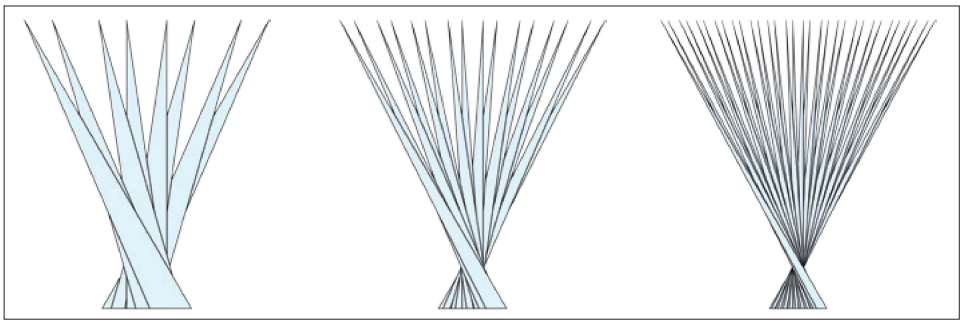

Figura 2. Figura resultante após três, quatro e cinco passos.

tro do monstro que acabámos de construir. Isso decorre de um argumento geométrico de J. Pál (o mesmo que resolveu o problema de Kakeya para conjuntos convexos) que garante ser possível transladar um segmento unitário para uma posição paralela no plano *varrendo uma área arbitrariamente pequena*; cf. [33, fig 1]. Em segundo lugar, o triângulo equilátero de que partimos só contém segmentos unitários nas direções descritas por um ângulo de 60 graus, mas tomando a união disjunta de três cópias rodadas consegue-se abranger todas as direções pretendidas.

E o que tem isto a ver com Borsuk-Ulam? E com *ondas*?

3. ONDAS

Desde o trabalho visionário[2] de J. Fourier [11] que se sabe que *qualquer* função diferenciável $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0 = f(\pi)$ pode ser escrita com uma soma de "harmónicos",

$$f(x) = \sum_n a_n \operatorname{sen}(nx), \tag{1}$$

onde os números a_n são os *coeficientes de Fourier* de f, dados pelos integrais

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(nx) \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Isto pode parecer uma tarefa impossível neste grau de generalidade, mas convém realçar que a soma (1) poderá conter um número *infinito* de termos. Nos tempos idos de Fourier, ainda não havia uma base matemática sólida para lidar com somas infinitas desse género. Adotando uma perspetiva mais moderna, podemos escolher um inteiro N suficientemente grande e somar apenas os termos $a_n \operatorname{sen}(nx)$ de (1) correspondentes a $n \leq N$, ou seja, considerar as *somas parciais* $\sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen}(nx)$. À medida que N aumenta, a soma parcial torna-se uma aproximação cada vez mais fidedigna da função original f *desde que* esta seja diferenciável. Caso contrário, a aproximação pode ainda valer desde que a função f seja razoavelmente bem-comportada. Ideias como esta estiveram na génese da *análise de Fourier*, que inclui ligações variadas à física, à engenharia eletrotécnica e ao processamento de sinal. Apesar de algumas questões subtis ainda não estarem completamente esclarecidas, a análise de Fourier unidimensional é hoje em dia bem compreendida; cf. [9, 32].

Somas como (1) são úteis para analisar funções definidas no intervalo $[0, \pi]$ ou, equivalentemente, funções ímpares 2π-*periódicas* definidas na reta real, isto é, tais que $f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Funções não periódicas definidas em $\mathbb{R}$ também podem ser estudadas com métodos de análise de Fourier. Por exemplo, uma tal função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita como

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} h(s) e^{-ixs} \mathrm{d}s \tag{3}$$

onde, para cada $s \in \mathbb{R}$, o número $h(s)$ é dado por

$$h(s) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{ixs} \mathrm{d}x.$$

A função h é a *transformada de Fourier* de g, e os valores de h correspondem aos coeficientes de Fourier (2). Por analogia às somas parciais, podemos considerar os integrais parciais

$$S_N g(x) = \int_{-N}^{N} h(s) e^{-ixs} \mathrm{d}s, \tag{4}$$

e indagar se a função $S_N g$ constitui uma boa aproximação para g desde que N seja suficientemente grande. Um modo de responder a esta questão é verificando se o *erro*

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - S_N g(x)|^p \mathrm{d}x \tag{5}$$

diminui à medida que N aumenta, para algum número real $p \geq 1$. Se a função g for suficientemente bem-comportada, então de facto o integral (4) aproxima g cada vez melhor, no sentido em que o erro (5) converge para zero à medida que N tende para infinito.

E o que acontece em dimensões mais elevadas? Se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ for uma função de *duas* variáveis, então o análogo de (3) seria

$$g(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} h(s, t) e^{-i(xs+yt)} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$$

onde, para cada par $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, o número $h(s, t)$ é dado por

$$h(s, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) e^{i(xs+yt)} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Uma vez mais, poderíamos esperar que, à medida que N aumenta, integrais parciais como

$$S_N^{\square} g(x, y) = \int_{-N}^{N} \int_{-N}^{N} h(s, t) e^{-i(xs+yt)} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t, \text{ ou}$$
$$S_N^{\circ} g(x, y) = \iint_{B_N} h(s, t) e^{-i(xs+yt)} \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$$

[2] Que no ano passado comemorou o seu 200.º aniversário - os festejos incluíram uma conferência internacional de dez dias em Edimburgo, na Escócia.

onde $B_N = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq N^2\}$, fossem boas aproximações para $g(x,y)$. Na função $S_N^{\square} g(x,y)$ aparece um quadrado ($\square$) correspondente à região de integração $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : -N \leq s,t \leq N\}$; por outro lado, na função $S_N^{\circ} g(x,y)$ aparece um círculo ($\circ$) correspondente à fronteira do disco B_N.

Acontece que $S_N^{\square} g$ é, de facto, uma boa aproximação para g, no sentido em que o erro $\iint_{\mathbb{R}^2} |g(x,y) - S_N^{\square} g(x,y)|^p \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ converge para zero à medida que N tende para infinito, para todo o $p \geq 1$. Esperava-se que o mesmo acontecesse com $S_N^{\circ} g$. No entanto, em 1971, C. Fefferman [10] surpreendeu tudo e todos ao demonstrar que, para determinadas funções g, a aproximação $S_N^{\circ} g$ pode comportar-se de modo muito diferente de $S_N^{\square} g$, e como tal de g. A função g construída por Fefferman está intimamente relacionada com o problema de Kakeya descrito no capítulo anterior. Considere-se um conjunto de Kakeya planar $K \subset \mathbb{R}^2$ com área muito pequena, e defina-se g como a função característica de K; isto é, $g(x,y) = 1$ se $(x,y) \in K$ e $g(x,y) = 0$ se $(x,y) \notin K$. A função g descreve um conjunto de área pequena mas que contém um segmento unitário em cada direção possível, enquanto $S_N^{\circ} g$ descreve um conjunto muito diferente do anterior: a operação S_N° translada cada um dos segmentos de tal forma que deixam de se sobrepor; cf. figura 3. Por esse motivo, as funções g e $S_N^{\circ} g$ não são nada parecidas e, para todo o $p \neq 2$, o erro $\iint_{\mathbb{R}^2} |g(x,y) - S_N^{\circ} g(x,y)|^p \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ não diminui à medida que N aumenta. Esta descoberta revolucionária interligou o mundo geométrico dos conjuntos de Kakeya e o mundo analítico de Fourier, e criou uma nova área da análise harmónica [31] que procura explorar estas ligações.

Decorre do teorema 2 que existem subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ de volume zero que contêm um segmento unitário em cada direção possível. Uma questão mais refinada é a de determinar exatamente a *dimensão de Hausdorff*[3] desses conjuntos.

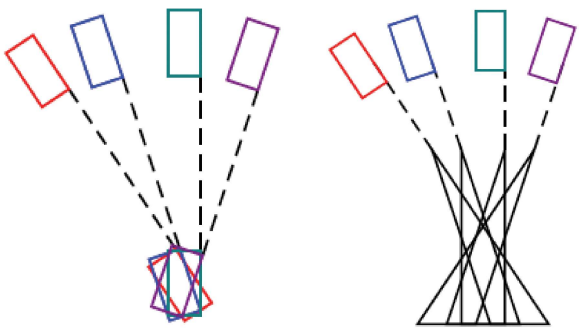

Figura 3. Antes e depois da aplicação de S_N°, que translada cada retângulo na direção do seu eixo principal por forma a eliminar a sobreposição inicial.

Conjetura 1. *A dimensão de Hausdorff de um conjunto de Kakeya em $\mathbb{R}^d$ é igual a d.*

A conjetura 1 foi resolvida em $\mathbb{R}^2$ por R. O. Davies [8] em 1971, mas permanece um problema em aberto em todas as dimensões superiores. Apesar disso, houve um progresso notável – parcialmente responsável pelas medalhas Fields atribuídas a C. Fefferman (1978), J. Bourgain (1994) e T. Tao (2006) – que tem servido de grande inspiração para o desenvolvimento da análise harmónica nas últimas décadas. Por exemplo, uma versão *multilinear* da conjetura de Kakeya foi demonstrada em 2006 por J. Bennett, A. Carbery e T. Tao [1], tendo um importante caso-limite sido depois elucidado por L. Guth [13]. As provas eram longas, técnicas e de difícil digestão, usando ferramentas sofisticadas de topologia algébrica. Em 2013, A. Carbery e S. Valdimarsson [7] descobriram uma prova alternativa do teorema multilinear de Kakeya que se baseia apenas em Borsuk-Ulam – o teorema 1 que descrevemos na introdução, e que fará uma última aparição mágica no próximo capítulo.

4. MAGIA

Quando pensamos em ilusionismo, a primeira coisa que nos vem à cabeça é... análise harmónica? Talvez não. Mas a verdade é que o mundo da matemática e a arte da ilusão se tocam de tempos a tempos. Quem nunca foi aborrecido de morte numa festa de aniversário de um primo com um truque de cartas matemático que levante a mão. Pois. Foi o que pensámos. E esta proximidade do ilusionismo à matemática não é recente. O primeiro texto conhecido com a descrição de truques mágicos com números é um manuscrito em latim, intitulado *De Arithmeticis Propositionibus*, atribuído a Alcuíno de Iorque e escrito no século VIII [19]. Em livro impresso temos os primeiros truques matemáticos na obra *De Arithmetica,* de Filippo Calandri, que saiu de uma tipografia florentina em 1491, e em Portugal o primeiro a descrever truques de ilusionismo (matemático, claro está) foi Gaspar Nicolas, no célebre *Tratado da Pratica Darismetica,* de 1519 [17]. Truques de cartas, no nosso país, surgem primeiramente no *Thesouro de Prudentes,* de Gaspar Cardoso de Sequeira, em 1612 [20]. E é precisamente com dois truques de cartas que damos início a este espetá-

culo, perdão, última secção do artigo. Mas não são truques de cartas quaisquer: um deles até já foi apelidado de "o melhor truque de cartas do mundo" [21].

O baralho de cartas que usamos para estes truques é o baralho habitualmente usado nos países lusófonos, com 52 cartas, distribuídas por quatro naipes: copas (♥), espadas (♠), ouros (♦), paus (♣). Cada naipe tem 13 cartas, sendo estas um ás (representado pela letra A), todos os números inteiros de 2 a 10, e três figuras: o valete, representado pela letra J (*jack*), a dama, representada pela letra Q (*queen*) e o rei, com a letra K (*king*).

- **Truque 1.** "*Fitch Cheney's five card trick*" [16, 21]
  Efeito. O ilusionista pede a um espetador que retire livremente cinco cartas do baralho. De seguida, é pedido ao espetador para fazer um telefonema para o assistente do ilusionista revelando-lhe quatro das cinco cartas escolhidas. Suponhamos que as cartas reveladas são o 7♠, seguido da Q♥, do 8♣ e do 3♦. O assistente do ilusionista, utilizando o seu apurado sentido de perceção extrassensorial, consegue dizer qual é a carta que está em falta: "Senhoras e senhores, a carta mistério é o K♠!"

- **Truque 2.** "*El juego del teléfono*" [12]
  Efeito. O ilusionista pede a um espetador que escolha livremente uma carta qualquer do baralho. De seguida, é feito um telefonema para o assistente do ilusionista que, recorrendo aos seus surpreendentes dotes de médium, consegue adivinhar à distância qual foi a carta escolhida pelo espetador.

4.1. A estratégia

Comecemos pelo truque 1.[4] A primeira reação será seguramente de espanto e incredulidade. Queixo caído. Respirar fundo, 1, 2, 3. Recuperados do choque inicial, vamos à explicação. É bom lembrar que o ilusionista tem a liberdade para fazer várias escolhas antes de instruir o espetador a fazer o telefonema: qual das cartas omitir (a "carta mistério"), quais das cartas mostrar, e por que ordem fazê-lo. Antes do telefonema, o ilusionista terá então de despreocupadamente olhar para as cinco cartas escolhidas, ordená-las num modo específico e instruir o espetador para que revele pelo telefone quatro das cinco cartas nessa mesma ordem.

Com cinco cartas escolhidas, há pelo menos duas do mesmo naipe, e esse é um bom ponto de partida para o código usado neste truque: o naipe da carta revelada em primeiro lugar deverá coincidir com o naipe da carta mistério. Falta "apenas" codificar o valor dessa carta nas três cartas restantes. Há 12 possibilidades (dentre as 13 iniciais, excluindo o valor da primeira carta) mas, permutando as três cartas restantes, o ilusionista pode transmitir apenas $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ *bits* de informação. Parece que chegámos a um beco sem saída, mas é aqui que as coisas se tornam interessantes. De facto, há uma decisão importante que o ilusionista pode e deve tomar: dentre as duas cartas do mesmo naipe, qual será considerada a carta mistério e qual deverá ser revelada em primeiro lugar?

Definindo valores numéricos para as cartas de figuras, $(\mathrm{A}, \mathrm{J}, \mathrm{Q}, \mathrm{K}) = (1, 11, 12, 13)$, considere-se o conjunto $S := \{1, 2, 3, \ldots, 12, 13\}$ de cartas de um naipe fixado munido de aritmética modular. Isto faz com que, dados dois quaisquer elementos x, y de S, seja sempre possível transitar de x para y ou de y para x em não mais do que *seis* passos. Por exemplo, se $x = 3$ e $y = 11$, então o trajeto de x para y requer $y - x = 11 - 3 = 8$ passos, mas aquele de y para x requer apenas $x - y = 3 - 11 = -8 \equiv 5 \pmod{13}$ passos, onde a última identidade, "$-8 \equiv 5$", vale somente no exótico mundo da aritmética módulo 13.

A estratégia pode então ser resumida em três passos:

(i) Escolher a primeira carta a ser revelada pelo telefone garantindo que:
  (a) Tem o mesmo naipe da carta mistério;
  (b) Acrescentando (módulo 13) um número de 1 a 6 ao seu valor, se obtém o valor da carta mistério;

(ii) Ordenar a segunda, a terceira e a quarta cartas por forma a transmitir o valor de 1 a 6 do ponto (i)(b); pode-se, por exemplo, ordenar todo o baralho numericamente com desempate através dos naipes[5] e, dadas três cartas $a < b < c$, assegurar a correspondência $(abc, acb, bac, bca, cab, cba) = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$;

(iii) Fazer uma vénia em resposta à ovação retumbante.

No caso acima descrito em que as cartas reveladas são o 7♠, seguido da Q♥, do 8♣ e do 3♦, sabemos por (i)(a) o nai-

[3] A dimensão de Hausdorff é uma medida da "rugosidade" ou, mais precisamente, da dimensão fractal, introduzida por F. Hausdorff em 1917. Para a definição rigorosa, consulte-se [25].

[4] A nossa apresentação é largamente inspirada no artigo [21]; por vezes, acrescentamos alguns detalhes.

pe da carta mistério: ♠. Por outro lado, $3 < 8 < 12 = Q$, pelo que por (ii) devemos acrescentar $cba = 6$ unidades ao valor da primeira carta. Como $7 + 6 = 13 = K$, temos então por (i)(b) que a carta mistério é de facto o K♠. *Voilà!* Não esquecer o passo (iii).

4.2. Análise preliminar

O truque 1 pressupõe uma mão de cinco cartas escolhidas de entre 52 possibilidades. Desta forma, há um total de $52 \times 51 \times 50 \times 49$ mensagens que o ilusionista pode transmitir, e $\binom{52}{5} = 52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48/5!$ mãos que o assistente pode descodificar. O número de mensagens é assim $5!/48 = 2.5$ vezes superior ao número de mãos, e de facto esta redundância manifesta-se na estratégia delineada na secção anterior: há algumas mãos que são codificadas por mais do que uma mensagem (por ex., qualquer mão com três ou mais cartas do mesmo naipe) e algumas mensagens que nunca são usadas (por ex., qualquer mensagem que contém a carta codificada por ela própria).

4.3. A generalização

Uma generalização natural do truque 1 consiste em selecionar uma mão de n cartas dentre N possíveis escolhas. Desta forma, há $N(N-1)(N-2)\dots(N-n+2)$ mensagens que o ilusionista pode transmitir, e $\binom{N}{n}$ mãos que podem ser decifradas. Se houver estritamente mais mãos do que mensagens, não há salvação (isto é, estratégia) possível. Por outras palavras, uma condição *necessária* para a existência duma estratégia válida é que a desigualdade $\binom{N}{n} \leq N(N-1)(N-2)\dots(N-n+2)$ valha, ou seja, que

$$N \leq n! + n - 1. \tag{6}$$

Surpreendentemente, e como veremos na próxima secção, a condição (6) também é *suficiente* para a existência duma estratégia vencedora. Isto não é nada óbvio: há pelo menos tantas mensagens como mãos, mas não é de todo claro que se possa emparelhar as mãos e as mensagens por forma a que cada mão seja codificada por uma mensagem *que use apenas as n cartas disponíveis.* Em particular, o truque 1 também funcionaria se as cinco cartas fossem escolhidas de um baralho com $5! + 5 - 1 = 124$ cartas.

4.4. A matemática que tudo explica: König, Birkhoff, Von Neumann, Hall

Um vetor diz-se *estocástico* se cada uma das suas componentes for não negativa e a soma de todas elas for igual a 1. Uma matriz diz-se *duplamente estocástica* se cada uma das suas linhas e colunas for um vetor estocástico. Uma *matriz de permutação* é uma matriz quadrada com entradas em $\{0,1\}$ e exatamente um 1 em cada linha e em cada coluna. A matriz identidade é uma matriz de permutação e, de facto, qualquer matriz de permutação é obtida rearranjando as linhas ou colunas da matriz identidade. Dadas duas matrizes de permutação A e B, qualquer *combinação convexa* $\theta A + (1-\theta)B$ (onde $0 \leq \theta \leq 1$) é duplamente estocástica. O recíproco, menos óbvio, também vale; é o conteúdo de um resultado de D. König [22] de 1936, normalmente atribuído aos trabalhos de G. Birkhoff [3] e de J. von Neumann [35] de 1946 e 1953, respetivamente.

Teorema 3. (König-Birkhoff-Von Neumann) *Qualquer matriz duplamente estocástica é combinação convexa de matrizes de permutação.*

A prova mais conhecida do teorema 3 é por indução, removendo uma fração apropriada de uma matriz de permutação P da matriz duplamente estocástica dada. Há vários métodos diretos para determinar a matriz P, mas em vez disso vamos considerar a seguinte versão discreta do teorema 3, que lhe é equivalente.

Teorema 4. (König-Birkhoff-Von Neumann v2). *Qualquer matriz com entradas inteiras não-negativas e soma constante de linhas e colunas pode ser escrita como uma soma de matrizes de permutação.*

A título de exemplo, apresentamos a decomposição do seguinte *quadrado mágico* (em que a diagonal e a antidiagonal principais também têm soma igual a 15) prometida pelo teorema 4:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para provar o teorema 4 por indução na soma constante basta mostrar que cada matriz que satisfaz as hipóteses do teorema é (componente a componente) maior do que alguma matriz de permutação ou igual. Por seu turno,

isso decorre do *teorema do casamento de Hall*, provado por P. Hall [14] em 1935, que apresentamos de forma ligeiramente informal mas sugestiva.

Teorema 5. (Hall) *Sejam dados dois conjuntos de n pessoas, $\mathcal{M}$ (mulheres) e $\mathcal{H}$ (homens). Para cada $1 \leq k \leq n$, seja $\mathcal{H}_k \subseteq \mathcal{H}$ o conjunto de homens com os quais a k-ésima mulher consideraria casar-se. Então existe um casamento universal que deixa todos*[6] *felizes se e só se*

$$\#\bigcup_{k\in\mathcal{K}} \mathcal{H}_k \geq \#\mathcal{K}, \text{ para todo } \mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}, \tag{7}$$

ou seja, para cada $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, o número de homens com os quais pelo menos uma mulher de $\mathcal{K}$ se casaria é pelo menos igual ao número de mulheres em $\mathcal{K}$.

A condição (7) é claramente necessária para a existência de um casamento universal: se não for satisfeita por algum $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$, então não há homens que cheguem para as mulheres de $\mathcal{K}$. O teorema 5 garante que a condição (7) também é suficiente.

O teorema 4 (e por conseguinte o teorema 3) decorre imediatamente do teorema 5 se pensarmos que podemos "casar" uma linha com uma coluna sempre que a sua entrada comum seja diferente de zero. A condição de as somas de linhas e colunas serem constantes garante que quaisquer k colunas têm pelo menos k linhas que consideram elegíveis. E um casamento universal corresponde à matriz de permutação prometida pelo teorema 4.

Das várias provas conhecidas do teorema 5, a mais elegante é topológica e baseia-se no teorema de Borsuk-Ulam [15, §4] – o mesmo resultado que, como vimos, garante a existência de um par de pontos antípodas exatamente à mesma temperatura e à mesma pressão, e que foi recentemente utilizado para reprovar o caso-limite do teorema multilinear de Kakeya.

E como é que isto se relaciona com a generalização do truque 1 que descrevemos na secção anterior? Considere-se a matriz $A = (a_{ij})$ de 0s e 1s com linhas indexadas pelas $\binom{N}{n}$ mãos e colunas indexadas pelas $N!/(N-n+1)!$ mensagens, onde $a_{ij} = 1$ se e só se todas as cartas utilizadas na j-ésima mensagem aparecerem na i-ésima mão. Se vale a igualdade em (6), isto é, $N = n! + n - 1$, então a matriz A é quadrada e tem exatamente $n!$ 1s em cada linha e em cada coluna. Concluímos que algum subconjunto destes 1s forma uma matriz de permutação. Mas isto é precisamente uma estratégia para o ilusionista e o seu assistente – uma bijeção entre mãos e mensagens que pode ser utilizada para os representar. De facto, e pelo que acabámos de dizer, não há apenas uma estratégia, mas pelo menos $n!$ estratégias distintas, cada uma correspondente a uma matriz de permutação distinta.

4.5. Duas notas finais

▸ O argumento da secção anterior que generaliza o truque 1 é não construtivo. Para o tornar construtivo, veja-se a última secção de [21].

▸ E o truque 2, esquecido desde o princípio desta secção? Tratar-se-á de pura telepatia? Dificilmente. Mas se não há mais cartas envolvidas, não pode haver transmissão de mensagem em código, certo? Errado. Quem telefona para o assistente, neste caso, é o ilusionista, que sabe qual foi a carta escolhida. Ao telefonar para o seu assistente, o que o público ouve é algo como "Olá, Diogo! Vou pôr em alta voz". Parece uma inocente troca de palavras, mas na realidade esconde o segredo, no *timing* do que é dito. Do outro lado da linha, assim que atende a chamada o assistente começa a dizer todos os valores das cartas, deixando passar um breve instante entre cada um (ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valete, dama, rei). Assim que ouve o valor da carta escolhida, o ilusionista diz: "Olá Diogo!". O assistente começa então a enumerar os vários naipes (copas, espadas, ouros, paus). Assim que ouve o naipe da carta escolhida, o ilusionista diz: "Vou pôr em alta voz". O assistente neste momento já sabe qual foi a carta escolhida e resta-lhe revelá-la ao público. Para acrescentar dramatismo à revelação, o assistente deverá aproximar-se passo a passo, com muita "intuição" e uma aura de mistério, da identidade da carta escolhida. Supondo tratar-se novamente do K♠, o diálogo poderia ser algo do género: "Assegure-se de que todos os presentes viram a carta durante pelo menos dois segundos... Desta forma, todos terão a imagem da carta em mente. Obrigado, é suficiente. Sinto que não se trata de uma carta vermelha, certo? É uma carta negra... com uma certa agressividade... Parece ser uma carta de espadas, estou certo? E parece-me ser uma carta com muito desenho, uma figura... Sinto uma energia masculina na carta... mas não parece um valete... Claro, é um rei. É o rei de espadas!".

[5] Os naipes podem ser ordenados alfabeticamente: ♥ < ♠ < ♦ < ♣, dado que "copas", "espadas", "ouros" e "paus" aparecem por essa ordem no dicionário.

[6] Assumimos, tal como na formulação original de Hall, que qualquer homem ficaria feliz em casar-se com qualquer mulher disposta a desposá-lo. *No comments.*

REFERÊNCIAS

[1] J. Bennett, A. Carbery, T. Tao, "On The Multilinear Restriction and Kakeya Conjectures". *Acta Math.* vol. 196, nº. 2, pp. 261-302, 2006.

[2] A. S. Besicovitch, "On Kakeya's Problem and a Similar One". *Math. Z.* vol. 27, nº.1, pp. 312-320, 1928.

[3] G. Birkhoff, "Three Observations on Linear Algebra". Univ. Nac. Tucumán. *Revista A.* vol. 5, pp. 147-151, 1946.

[4] K. Borsuk, "Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre". *Fund. Math.* vol. 20, pp. 177-190, 1933.

[5] J. Bourgain, C. Demeter, L. Guth, "Proof of the Main Conjecture in Vinogradov's Mean Value Theorem for Degrees Higher than Three". *Ann. of Math.* vol. 184, nº.2, pp. 633-682, 2016.

[6] L. E. J. Brouwer, "Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten". *Math. Ann.* vol. 71, pp. 97-115, 1911.

[7] A. Carbery, S. Valdimarsson, "The Endpoint Multilinear Kakeya Theorem via the Borsuk-Ulam Theorem". *J. Funct. Anal.* vol. 264, nº.7, pp. 1643-1663, 2013.

[8] R. O. Davies, "Some Remarks on the Kakeya Problem". *Proc. Cambridge Philos. Soc.* vol. 69, pp. 417-421, 1971.

[9] D. G. de Figueiredo, *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projecto Euclides, IMPA, 5.ª ed., 2018.

[10] C. Fefferman, "The Multiplier Problem For The Ball". *Ann. of Math.* vol. 94, n.º2, pp. 330-336, 1971.

[11] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur.* Firmin Didot Père et Fils, Paris, 1822.

[12] R. Giobbi, *Roberto Light: Juegos de Cartas Automáticos Para Magos Aficionados y Profesionales.* Ediciones Laura Avilés, Madrid, 1996.

[13] L. Guth, "The Endpoint Case of the Bennett-Carbery-Tao Multilinear Kakeya Conjecture". *Acta Math.* vol. 205, nº.2, pp. 263-286, 2010.

[14] P. Hall, "On Representatives of Subsets". *J. Lond. Math. Soc.* vol. 10, pp. 26-30, 1935.

[15] P. Haxell, "On Forming Committees". *Amer. Math. Monthly* vol. 118, nº.9, pp. 777-788, 2011.

[16] P. Freitas, T. Hirth, A. Silva, J. N. Silva, *Matemagia.* Associação Ludus, 2.ª ed., 2017.

[17] G. Jorge, "Tratado da Pratica Darismetyca: Um Livro Quinhentista Português com Segredos de Ilusionismo". *Magicamente - Revista da Associação Portuguesa de Ilusionismo*, nº.31, pp. 2-6, 2021.

[18] S. Kakeya, "Some Problems on Minima and Maxima Regarding Ovals". *Tôhoku Science Reports* vol. 6, pp. 71-88, 1917.

[19] W. Kalush, *Arithmetical Divination From Charlemagne's Court to Leonardo da Vinci.* Published for the Gathering for Gardner #4, Atlanta, 2000.

[20] T. Klauf, *A Importância do Baralho Ordenado no Ilusionismo.* Ed. de autor, Grijó, 1998.

[21] M. Kleber, "The Best Card Trick". *Mathematical Intelligencer* vol. 24 #1 (Winter 2002).

[22] D. König, "Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe". *Math. in Monogr. und Lehrb. XVI.* Leipzig: Akad. Verlagsges. 1936. XII, 258 S.

[23] I. Łaba, "From Harmonic Analysis to Arithmetic Combinatorics". *Bull. Amer. Math. Soc.* (N.S.) vol. 45, nº.1, pp. 77-115, 2008.

[24] L. Lyusternik, L. Shnirel'man, *Topological Methods in Variational Problems.* (1930) Issledowatelskii Institut Matematiki I Mechaniki Pri O. M. G. U. Moscow.

[25] P. Mattila, *Fourier analysis and Hausdorff dimension. Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 150. Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[26] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry. Written in Cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[27] R. O'Donnell, *Analysis of Boolean Functions.* Cambridge University Press, New York, 2014.

[28] J. Pál, "Ein Minimumproblem für Ovale". *Math. Ann.* vol. 83, nº.3-4, pp. 311-319, 1921.

[29] O. Perron, "Über einen Satz von Besicovitsch". *Math. Z.* vol. 28, nº.1, pp. 383-386, 1928.

[30] I. J. Schoenberg, "On Certain Minima Related to the Besicovitch-Kakeya Problem". *Mathematica (Cluj)* vol. 4 (27), pp. 145-148, 196.

[31] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[32] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis. An introduction. Princeton Lectures in Analysis*, vol. 1. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[33] T. Tao, "From Rotating Needles to Stability of Waves: Emerging Connections Between Combinatorics, Analysis, And PDE." *Notices Amer. Math. Soc.* vol. 48, nº.3, pp. 294-303, 2001.

[34] M. Viazovska, "The Sphere Packing Problem in Dimension 8". *Ann. of Math.* vol. 185, nº.3, pp. 991-1015, 2017.

[35] J. von Neumann, "A Certain Zero-Sum Two-Person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem". Contributions to the Theory Of Games, vol.2, pp. 5-12. *Annals of Mathematics Studies*, nº.28. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953.

SOBRE OS AUTORES

Gonçalo Jorge é ilusionista e integra a dupla Tá na Manga, premiada internacionalmente em numerosos eventos dedicados às artes mágicas, nomeadamente no Campeonato do Mundo de Magia. Para além do ilusionismo, GJ é médico.

Diogo Oliveira e Silva é matemático, e trabalha na interface da análise harmónica com a teoria geométrica da medida e as equações com derivadas parciais. Depois de um périplo de vários anos pela Califórnia, Alemanha e Inglaterra, DOS regressou recentemente a Portugal.

Os autores são amigos há mais de duas décadas, mas este é o primeiro artigo que escrevem juntos.

Agradecem ao *referee* anónimo a leitura cuidadosa do artigo, bem como algumas sugestões e comentários.