



SOFIA O. LOPES
Universidade
do Minho
sofialopes@math.
uminho.pt

FERNANDO
A. C. C. FONTES
Universidade
do Porto
faf@fe.up.pt

ÁGUA, ÁGUA EM TODO O LADO E NEM UM PINGO DESPERDIÇADO: COMO A MATEMÁTICA PODE AJUDAR OS AGRICULTORES A IRRIGAR DE FORMA MAIS EFICIENTE

A água doce é um recurso escasso, mas vital para o ser humano, e 69% do seu total é usado no setor agrícola. Aqui mostramos como a matemática é utilizada na irrigação de modo a que todas as gotas contem. Uma utilização eficiente da água para irrigação requer, por um lado, o planeamento – que envolve modelação, análise de dados, estatística e otimização – e, por outro lado, o controlo – que envolve automação, teoria do controlo, eletrónica e agronomia. Neste artigo, descrevemos essencialmente as questões de planeamento e de controlo que utilizam ferramentas de otimização e teoria do controlo. Relatamos também brevemente alguns testes experimentais e o desenvolvimento de um protótipo no âmbito de um projeto de investigação e desenvolvimento.

1. INTRODUÇÃO E MOTIVAÇÃO

A água doce é um recurso realmente escasso: representa 2.5% do total de água global, dos quais apenas 0.025% são aceitáveis para consumo humano [12]. É um bem vital para o ser humano; é necessária não apenas para consumo direto, mas também para tarefas agrícolas, indústrias energéticas, etc. A agricultura (irrigação, pecuária e aquacultura) utiliza 69% das captações anuais de água a nível mundial, tornando-se o setor que mais consome água no planeta. Apesar de começarmos a estar conscientes desta escassez e do seu aumento preocupante nos próximos anos, há ainda muito a fazer neste país e no mundo para reverter a situação. No verão de 2022, devido à falta de água em Portugal, questionou-se a utilização da água na agricultura e na produção hidroelétrica, sendo estas as primeiras a serem sujeitas a contenções.

Entre 1950 e 2020, a população mundial triplicou [13]; a procura de alimentos e de água acompanhou esse crescimento. Nos objetivos de desenvolvimento sustentável das Nações Unidas inclui-se garantir a disponibilidade e a gestão sustentável da água potável e do saneamento para todos. Uma das metas para atingir tal objetivo é aumentar substancialmente a eficiência no uso da água em todos os setores, assegurar extrações sustentáveis e o abastecimento de água doce para enfrentar a escassez de água, bem como reduzir substancialmente o número de pessoas que sofrem com a sua escassez (Meta 6.4, [12]). Prevê-se que para atingir esta meta em 2030 será necessário quadruplicar o ritmo do progresso das medidas de mitigação (ver figura 1). Se mantivermos o ritmo atual, estima-se que em 2030, 1600 milhões de pessoas carecerão de água potável gerida com segurança.

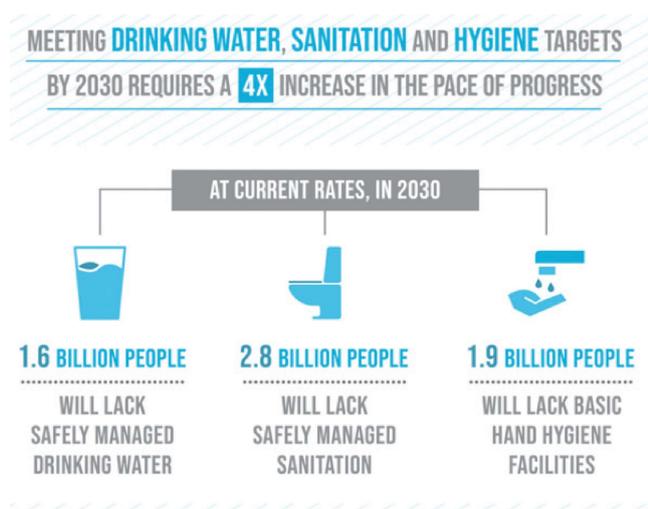


Figura 1. Visão geral do progresso na implementação da Agenda 2030 para o Desenvolvimento Sustentável relativo ao Objetivo 6, Meta 6.4. In *The Sustainable Development Goals Report 2022*, United Nations, 2022 [14].

Assim, é cada vez mais pertinente educar a sociedade e sensibilizar futuros governantes para comportamentos e utilização de estratégias sustentáveis, nomeadamente para o uso da água de uma forma inteligente, eficiente e otimizada. Ao nível da produção agrícola, em particular, é crucial procurar formas de otimizar a utilização deste precioso recurso de modo a encontrar soluções sustentáveis e responsáveis que satisfaçam as necessidades de alimentação humana. A matemática poderá ter aqui um papel importante a desempenhar a nível da compreensão dos fenómenos envolvidos (utilizando técnicas de modelação de sistemas dinâmicos e de parâmetros distribuídos, análise de dados e estatística), a nível de planeamento, gestão e controlo da utilização da água (com técnicas de optimização e teoria do controlo).

Consciente destes factos, um grupo de investigadores nacionais propôs e desenvolveu o projeto de investigação e desenvolvimento *To Chair - The Optimization Challenges in Irrigation* (POCI-01-0145-FEDER-028247), financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, na área da matemática. Foi criada uma equipa de trabalho com o principal objetivo de estudar o problema da gestão de água como um problema de controlo ótimo, usando e/ou desenvolvendo ferramentas matemáticas dentro de diversas áreas científicas, para posterior aplicação em sistemas de irrigação para qualquer tipo de cultivo, em qualquer lugar do

mundo. Desta equipa fizeram parte investigadores da área de modelação matemática e estatística da Universidade do Minho, a equipa de optimização e engenharia de controlo da Universidade do Porto e do Politécnico do Porto, assim como investigadores em agronomia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD) cuja participação tem como intuito dar apoio na modelação matemática, na recolha de dados e na implementação de um *software* de apoio à decisão. Também fazem parte da equipa colegas da eletrónica e da informática da Universidade do Minho com o objetivo de dar apoio no desenvolvimento de uma interface e de um protótipo. No âmbito do projeto *To Chair* foram criados dois campos experimentais: um em laboratório (ambiente fechado) e outro numa vinha comercial (ambiente aberto). No laboratório foi criado um provete de ensaio com quatro sensores a diferentes alturas com sistema de rega ligado a um compressor com o objetivo de estudar a infiltração. Na vinha comercial (Quinta da N. Sr^a da Ribeira, Carrazeda de Ansiães) foi definida uma parcela experimental em que foi instalada uma estação meteorológica automática. Foram ainda colocados oito sensores (modelo 10HS) divididos por quatro profundidades distintas (10, 40, 70 e 110 cm), com o propósito de avaliar a dinâmica hídrica no solo. Complementarmente, foram recolhidas amostras de solo para caracterização física do mesmo (laboratório de solos da UTAD).

1.1. O Problema e as técnicas

O problema de irrigação poderá ser formulado como a determinação em cada instante da quantidade de água a fornecer a uma zona de terreno – i.e., determinar a função de controlo – de modo a que os requisitos hídricos da cultura sejam satisfeitos. Trata-se assim de um problema de controlo.

Na sua maioria os sistemas de rega existentes baseiam-se em controlos "on-off" sem técnicas de previsão associadas. Nos casos em que o sistema de rega é automatizado, o seu funcionamento dispara o ciclo de rega quando um valor crítico mínimo da humidade do solo é detetado e suspende-o quando um máximo definido é atingido (às vezes, perto da saturação). Uma das consequências do uso desta técnica de controlo básica é o excesso de água no solo, sendo responsável pelo desperdício de elevadas quantidades de água, prejudicando o nosso ecossistema sem beneficiar, ou até prejudicando, o cultivo. Estes sistemas podem ser melhorados se houver um conhecimento da evolução da água no solo ao longo do tempo e também do espaço, ainda mais se aliado à previsão da pluviosidade

de e à utilização de água pela planta. O uso de modelos matemáticos adequados permite estimar a necessidade de água para a irrigação em diferentes cenários, uma maior adequação das necessidades hídricas da planta às diferentes fases do seu crescimento e detetar falhas no sistema de irrigação, contribuindo para o uso eficiente de água.

Na engenharia de controlo, temos vindo a assistir nos últimos anos à utilização cada vez mais frequente de técnicas de controlo baseadas em modelos [3]. Estas permitem abordar problemas mais complexos ou obter ganhos de eficiência quando comparadas com técnicas mais simples como o controlo "on-off" (que encontramos nos sistemas de rega, em dispositivos com termostatos como os fornos, etc.) ou como os controladores PID – Proporcional Integral Derivativo (os controladores usados mais frequentemente para determinar a posição e a velocidade de motores). Algumas das técnicas de controlo baseadas em modelos aliam-se à otimização para conseguir maximizar critérios de desempenho a definir pelo projetista. Estas técnicas, chamadas de controlo baseado em otimização, são essencialmente o controlo ótimo e o controlo preditivo.

A teoria de controlo ótimo emergiu como um campo de investigação na década de 1950 em resposta a problemas relativos à exploração aeroespacial do sistema solar, nomeadamente o cálculo de trajetórias de foguetões que minimizem o consumo de combustível [15]. Problemas de controlo ótimo envolvem a otimização da função de custo que depende de um estado e de controlo relacionados através de equações diferenciais e outras restrições com formulação algébrica. O facto de se pode especificar um conjunto de restrições de controlo, combinadas com possibilidade de lidar com funções de custo gerais amplia a aplicabilidade de problemas de controlo ótimo para uma ampla gama de problemas. Consequentemente, a teoria do controlo ótimo abrange diversas áreas, com várias abordagens possíveis, com várias aplicações em matemática, engenharia, economia, biologia, e é uma fonte de várias técnicas e ideias. Neste caso, o controlo ótimo ajuda-nos a obter um plano da utilização da água que minimiza o desperdício.

Posteriormente, será necessário implementar o plano obtido. Aqui a teoria do controlo poderá de novo ajudar-nos com um mecanismo fundamental chamado realimentação. É de esperar que, ao implementar o plano calculado através do controlo ótimo baseado em modelos, a evolução ao longo do tempo das várias variáveis envolvidas não seja exatamente a prevista: o modelo é uma aproximação e não uma representação exata da realidade,

e a previsão da pluviosidade também não é garantida. Assim, há que medir frequentemente algumas das principais variáveis a controlar e replanear caso o comportamento não seja o previsto. A esta medição e à sua utilização para modificar o controlo chama-se realimentação, e é um dos mais importantes mecanismos para os sistemas de controlo lidarem com a incerteza e com as perturbações. Quando replaneamos frequentemente, aliando o controlo ótimo a esta realimentação de uma forma iterativa, estamos perante a técnica de controlo preditivo, cuja utilização iremos descrever.

Finalmente, uma palavra ao tratamento de dados e à estatística. Estes são usados em diferentes fases do processo: na construção do modelo, nomeadamente na sua validação e na identificação de parâmetros; na estimação de variáveis não medidas diretamente (por exemplo a humidade do solo em locais afastados dos sensores), e podem ser usados para melhorar o controlo usando técnicas de aprendizagem computacional.

2. MODELO MATEMÁTICO

Apresentamos aqui um modelo simplificado, em que é considerada a quantidade de água no solo numa única localização. O principal objetivo do problema de irrigação introduzido em [5] (aperfeiçoado em [4]) é minimizar o uso de água na irrigação de um campo agrícola garantindo que o crescimento saudável da cultura seja preservado. Assumindo que o controlo $u(t)$ é o caudal de água de rega no tempo t , a função custo a minimizar é o gasto total de água na rega, ou seja:

$$\text{Minimizar } \int_0^{t_f} u(t) dt,$$

onde t_f é o tempo final de planeamento. Considera-se que a variável de estado $x(t)$ é a quantidade de água existente no solo em determinado instante de tempo t . Para garantir um crescimento saudável da cultura, uma restrição de estado deve ser satisfeita:

$$x(t) \geq x_{\min}, \quad \forall t \geq 0,$$

ou seja, a quantidade de água no solo $x(t)$ tem de ser maior ou igual a um determinado nível x_{\min} , este valor é conhecido como necessidade hidrológica da cultura.

A variação da água no solo é baseada na equação do balanço hidrológico:

$$\dot{x}(t) = u(t) + r_{\text{fall}}(t) - e_{\text{vtp}}(t) - \text{loss}(t, x(t)),$$

onde r_{fall} é a previsão da precipitação durante um período

do de dias seguintes ao dia inicial, $evtp$ é a evapotranspiração estimada para o tipo de cultura, e $loss$ é a percolação profunda (a água que se encontra abaixo das raízes). A $evtp$ é calculada com base no modelo [1] usando o coeficiente da cultura, as previsões meteorológicas e a localização da cultura, nomeadamente: temperatura máxima, temperatura mínima, humidade relativa do ar, intensidade do vento, radiação solar, latitude e altitude. Apesar de vários autores considerarem que a percolação profunda ($loss$) é igual a zero, obtivemos em alguns casos valores significativos. Em [7], comparamos dados reais com a simulação do modelo desenvolvido em [5], sendo para tal necessário considerar valores não nulos em relação à percolação profunda. Por outro lado, é bem conhecido que a equação de Horton [2] permite medir taxas de infiltração no solo. É uma fórmula empírica que diz que a infiltração começa a uma taxa constante, i_0 , e diminui exponencialmente em função do tempo. Quando o nível de saturação do solo atinge um determinado valor, a taxa de infiltração estabiliza-se na taxa i_c . Considera-se $loss(x) = \beta x$. Atendendo a que as características do solo podem sofrer alterações ao longo do tempo por erosão, é considerado que o termo β depende do tempo. Por outro lado, quando a quantidade de água no solo atinge a capacidade de campo, x_{FC} , o solo não consegue reter mais água e nestes casos as perdas são significativamente maiores. Consequentemente, as perdas por percolação foram modeladas da seguinte forma, tendo em consideração [8]:

$$loss(t, x) = \begin{cases} \beta(t)x, & x \leq x_{FC} \\ x - x_{FC} + \beta(t)x, & x > x_{FC}, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde x_{FC} representa a quantidade de água retida no solo depois de este ter sido drenado. Tal valor depende do tipo de solo.

Assume-se que se conhece a humidade no instante inicial do solo, $x(0) = a$, e o caudal de água de irrigação u pertence ao intervalo $[0, M]$, onde M é o caudal máximo de água que sai do sistema de rega. O problema de controlo ótimo a ser estudado é formulado como:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & \int_0^{t_f} u(t) dt \\ \text{sujeito a} & \dot{x}(t) = u(t) + r_{fall}(t) - evtp(t) - loss(t, x(t)), t \in [0, t_f], \\ & x(0) = a, \\ & u(t) \in [0, M], \forall t \in [0, t_f], \\ & x(t) \geq x_{min}, \forall t \in [0, t_f]. \end{cases} \quad (2.2)$$

3. SIMULAÇÕES E COMPARAÇÃO COM UM CASO REAL

Por forma a obter as soluções numéricas do problema de controlo ótimo (2.2), é utilizada a função "fmincon" do MATLAB com algoritmo Active Set. As soluções numéricas são obtidas tendo como base dados meteorológicos reais no Instituto Superior de Engenharia do Porto (ISEP) durante dez dias. Atendendo ao tipo de cultura (relva) e ao tipo de solo considerado, assumiu-se que $x_{min} = 18.72 \text{ mm}$, e $x_{FC} = 46.8 \text{ mm}$. O caudal máximo da água da torneira foi considerado $M = 10 \text{ m}^3 / \text{dia}$. Atendendo a que o parâmetro $\beta(t)$ da parcela perdas é difícil de estimar, foi considerado constante no período dos dez dias. A sua determinação foi feita comparando a trajetória obtida pelo nosso modelo com a verdadeira trajetória em que β é escolhido por forma a minimizar a soma dos erros quadráticos entre as duas trajetórias mencionadas.

Estes exemplos correspondem a um período de dez dias consecutivos num campo do ISEP. Nos dois exemplos que estamos a analisar verifica-se que a precipitação é suficiente para a sobrevivência da cultura e nos dois exemplos abaixo ocorre uma situação de seca e o sistema de rega tem de ser ativado.

No primeiro caso (canto superior esquerdo da figura 2), houve fortes chuvas. Corresponde ao período compreendido entre 1 e 10 de maio de 2015. A precipitação neste período foi: [50.29, 3.81, 33.02, 30.73, 1.27, 0.76, 15.53, 0.76, 0, 0] (mm). Como a chuva é abundante, o segundo ramo da função de perdas "loss" é usado na equação do balanço hidrológico.

No segundo caso (canto superior direito da figura 2), houve precipitação ligeira. Corresponde ao período compreendido entre 14 e 24 de outubro de 2015. A precipitação neste período foi: [0, 0, 0, 0.76, 12.95, 0.25, 0, 0, 0, 0] (mm). Como a chuva não é abundante, apenas o primeiro ramo da função de perdas "loss" é usado.

No terceiro caso (canto inferior esquerdo da figura 2) não houve precipitação. Corresponde ao período entre 1 e 10 de agosto de 2015. A humidade do solo cai rapidamente e o controlo (irrigação) tem de ser acionado após dois dias. Como se pode ver nesta figura, uma vez acionada a irrigação, ela permanece até ao final do período em estudo, garantindo água suficiente para o crescimento saudável da cultura.

O quarto caso (canto inferior direito da figura 2) foi de seca. Corresponde ao período compreendido entre 1 e 10 de setembro de 2015. A chuva é muito escassa, a precipitação neste período foi: [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1.02, 0] (mm). A humidade do solo já estava no nível mínimo para o cres-

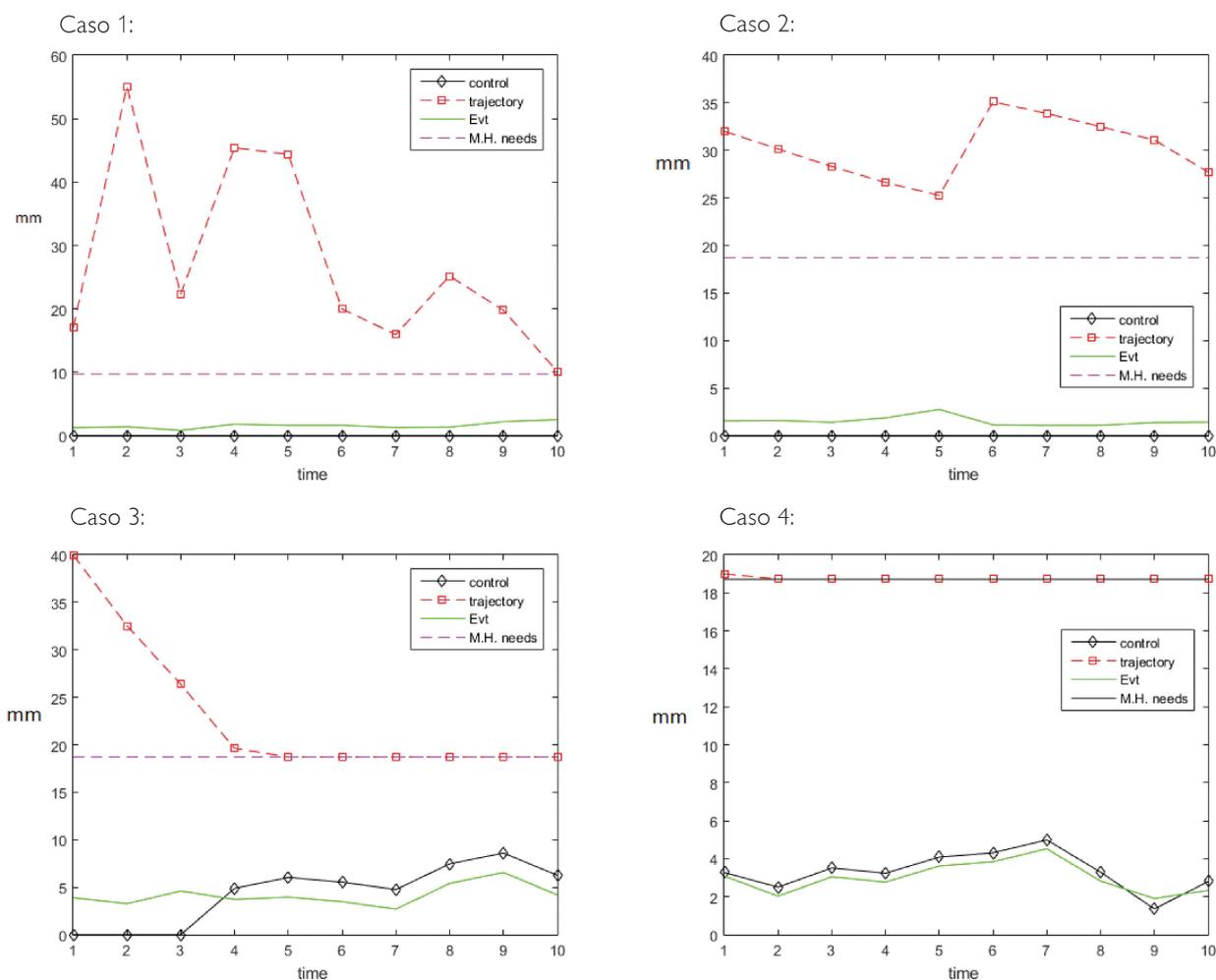


Figura 2. Trajetória (humidade no solo), controlo (rega), evapotranspiração e necessidades hídricas da planta, ao longo do tempo, em diferentes cenários de precipitação.

cimento da planta de uma forma saudável e, portanto, o controlo (irrigação) deve ser ativado durante todo o período. Observe que no dia 9, o valor da evapotranspiração é ligeiramente acima do valor de irrigação, uma vez que houve chuva fraca.

3.1 Comparação entre solução numérica e dados reais da humidade no solo

Os sensores utilizados no ISEP para medir a humidade do solo têm como unidade de saída a pressão. Para comparar os dados reais com as soluções numéricas é necessário converter os resultados numéricos em *mm* para tensão de água no solo (kPa – pressão). Esta conversão depende do tipo de solo [10] (para mais detalhes, ver [7]).

Na figura 3, está a comparação dos resultados das simulações com os dados reais do caso 1 (esquerda) e do caso 2 (direita). Salientamos que nestes casos não houve necessidade de rega.

No caso 3 e no caso 4, uma vez que houve irrigação, serão comparados os dados reais com as soluções numéricas da equação do balanço hidrológico, tendo como entrada a rega real. Salienta-se que um valor da humidade do solo abaixo de 5 kPa, significa que o solo está próximo da saturação; se este valor for superior a 20 kPa o solo não tem água suficiente para satisfazer as necessidades hídricas da planta.

Na figura 4 e na figura 5, do lado esquerdo, está a comparação do resultado da simulação com os dados reais

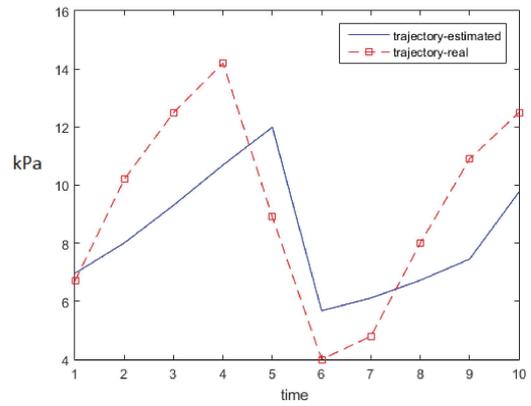
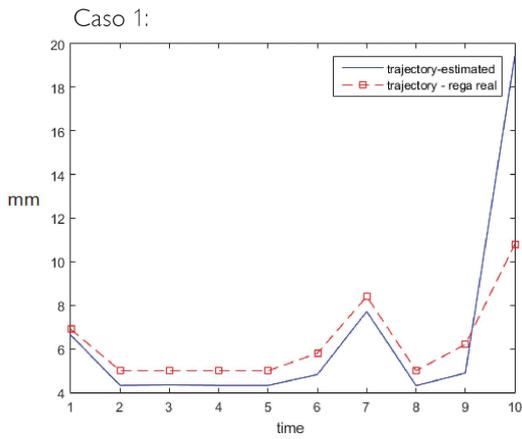


Figura 3. Trajetória (humidade no solo ao longo do tempo) estimada sem otimização e trajetória real, no caso 1 e no caso 2.

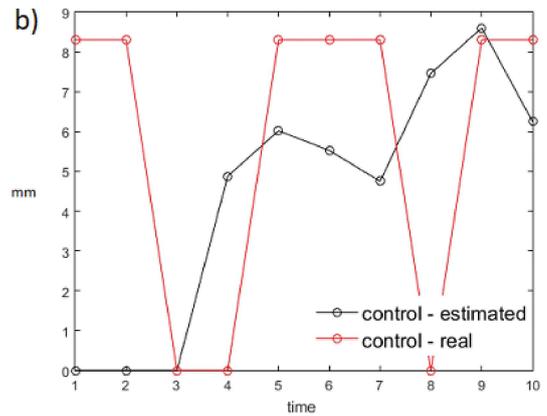
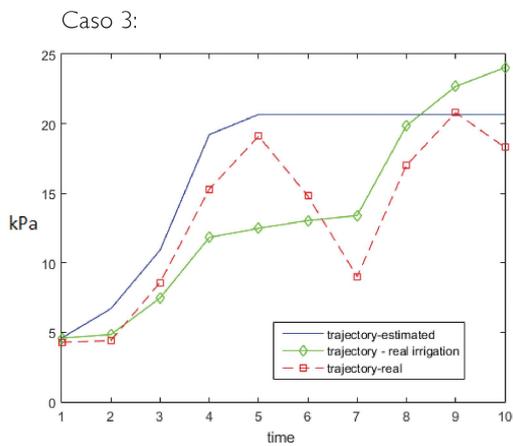


Figura 4. a) Trajetória (humidade no solo ao longo do tempo) real, trajetória estimada sem otimização e trajetória estimada com otimização. b) Controle (rega) real e controle estimado com otimização.

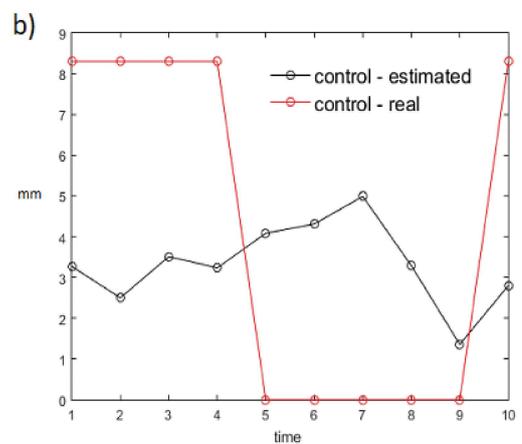
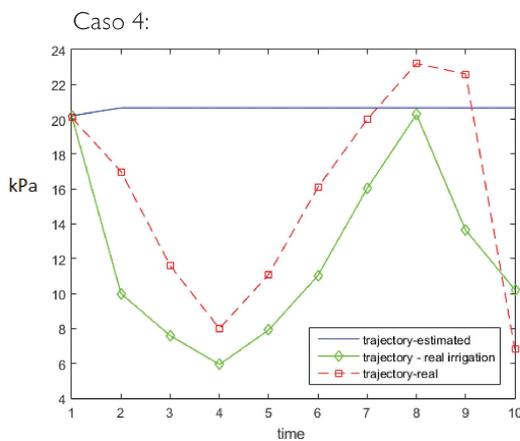


Figura 5. a) Trajetória (humidade no solo ao longo do tempo) real, trajetória estimada sem otimização e trajetória estimada com otimização. b) Controle (rega) real e controle estimado com otimização.

para o caso 3 e caso 4 respetivamente, assim como também é apresentada a solução ótima para cada um destes casos. No lado direito da figura 4 e da figura 5 está a comparação entre a água necessária para a rega através do modelo da secção 2 e a quantidade real de água utilizada na rega pelo ISEP (note-se que utilizam um sistema de controlo "on-off" para irrigação). No caso 3, estima-se que a economia de água atinja 16.8%, cifrando-se nos 11.1% no caso 4.

4. PROTÓTIPO

Um dos objetivos do projeto é o desenvolvimento de um protótipo de fácil utilização que ajude na tomada de decisão relativamente ao uso da água num sistema de rega. Pretende-se que o sistema utilize sensores de humidade do solo no campo, previsões do tempo, caracterização do solo e o tipo de cultivo. Esses dados são inseridos num programa Octave/Matlab que implementa um algoritmo de controlo ótimo para calcular o plano de irrigação para o campo de cultivo de acordo com o modelo apresentado na secção 2. Esta informação será comunicada ao sistema de rega já instalado no campo agrícola, de acordo com a figura 6.

Como já mencionado, o algoritmo de controlo ótimo necessita de dados de previsão do tempo que podem ser obtidos através de serviços disponíveis na internet. Os valores de humidade do solo são obtidos por sensores ana-

lógicos e são usadas comunicações móveis com o objetivo de enviar os dados para o servidor. O servidor disponibiliza um site para os usuários inserirem dados sobre as suas plantações e os seus campos. A partir deste conjunto de dados, o algoritmo calcula o plano de irrigação para o campo dado, que consiste numa lista de quantidade de água para cada dia, para um período de dias. Esta informação será comunicada ao sistema de rega (para mais detalhes ver [6]).

4.1 Replaneamento

Embora o modelo descrito na secção 2 tente representar a realidade, imprevistos podem sempre ocorrer, como alterações das condições climáticas que podem levar a um mau desempenho dos sistemas de rega. É importante avaliar se os resultados obtidos com o planeamento da rega se aproximam da realidade. Caso contrário, há a necessidade de replanear a solução de acordo com os dados reais atuais.

O replaneamento é feito definindo o estado inicial como a humidade real no solo e tendo em conta as novas previsões meteorológicas. A estratégia de replaneamento, apresentada no fluxograma na figura 7, implementa uma técnica conhecida como Controlo Preditivo. O algoritmo de replaneamento deteta se a humidade do solo lida pelo sensor difere significativamente da prevista no plano

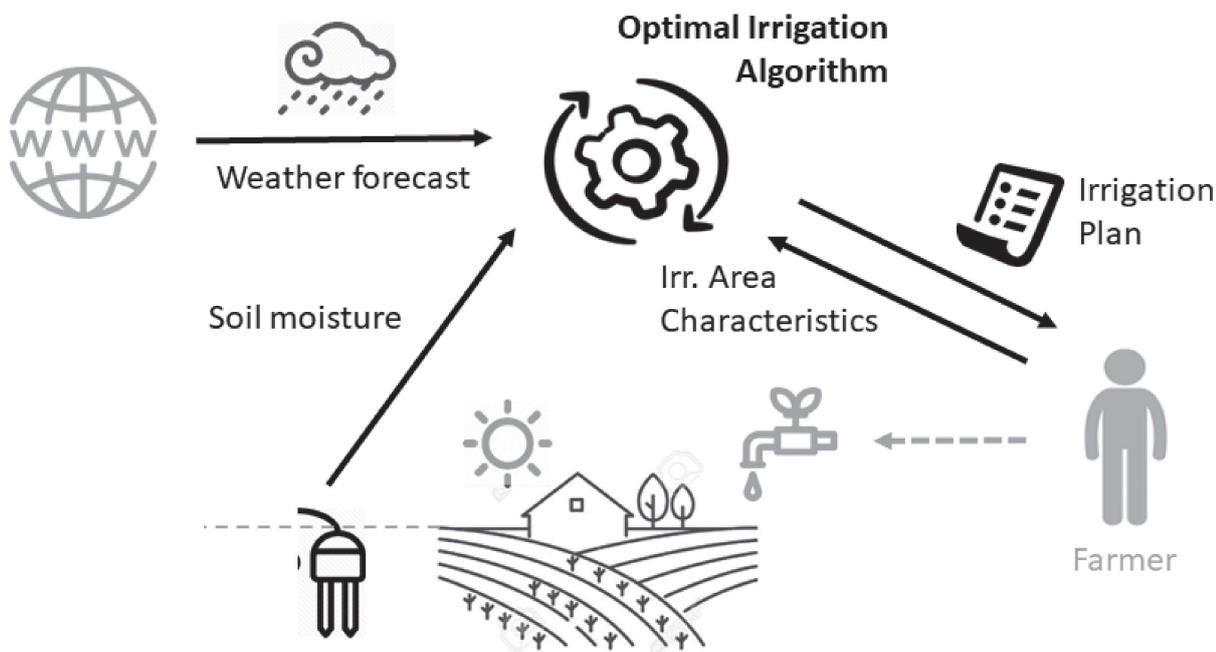


Figura 6. Visão geral do sistema e sua integração no campo.

de rega para o dia atual. Se for esse o caso, duas situações podem ocorrer: a restrição de estado não é violada e o processo é repetido com novos dados. Se a restrição de estado for violada, é necessário calcular um valor de água necessária na rega para evitar a violação da restrição de estado. Novos dados são então considerados impondo que o estado inicial seja agora x_{min} e o programa seja executado novamente. Salienta-se que ε é o erro aceitável entre a humidade do solo real e a humidade do solo estimada. Resultados numéricos deste procedimento podem ser encontrados em [9].

4.2 Plano de múltiplos pontos de rega

Até agora, o modelo assumiu que todo o campo é descrito como um ponto no espaço. O plano de irrigação para todo o campo de cultivo é projetado para esse ponto, implicando que a distribuição espacial das medidas de irrigação seja uniforme. Um modelo mais realista consideraria vários pontos de irrigação. Para simplificar, o modelo assume que o campo é retangular e consiste em várias áreas retangulares menores. Um ponto de irrigação no centro de cada retângulo menor recebe um plano de irrigação

descrito nas secções anteriores. O novo sistema de planeamento de irrigação agora pode lidar com necessidades de irrigação diferenciadas que dependem da localização espacial. O algoritmo do plano de múltiplos pontos de irrigação desenvolvido em [9] é proposto e implementado para considerar múltiplos pontos de irrigação. Após obter o plano de irrigação para cada ponto de irrigação, o algoritmo de redistribuição de água verificará se cada ponto de irrigação pode irrigar a quantidade de água necessária. Se, por exemplo, um ponto de rega não consegue satisfazer as suas necessidades, o algoritmo de redistribuição de água procura a possibilidade de satisfazer as necessidades necessárias noutros pontos de rega. Essas informações são repassadas ao agricultor. Suponha que é impossível atender às necessidades de todos os pontos de irrigação após atender às necessidades de irrigação nos pontos onde isso é possível. Nesse caso, a água disponível é redistribuída nos pontos de irrigação onde há necessidade de água. Uma vez que a informação sobre os défices hídricos em cada ponto de irrigação chegou ao agricultor, eventualmente, ele poderá obter água noutro local e prosseguir com o plano de múltiplos pontos de irrigação.

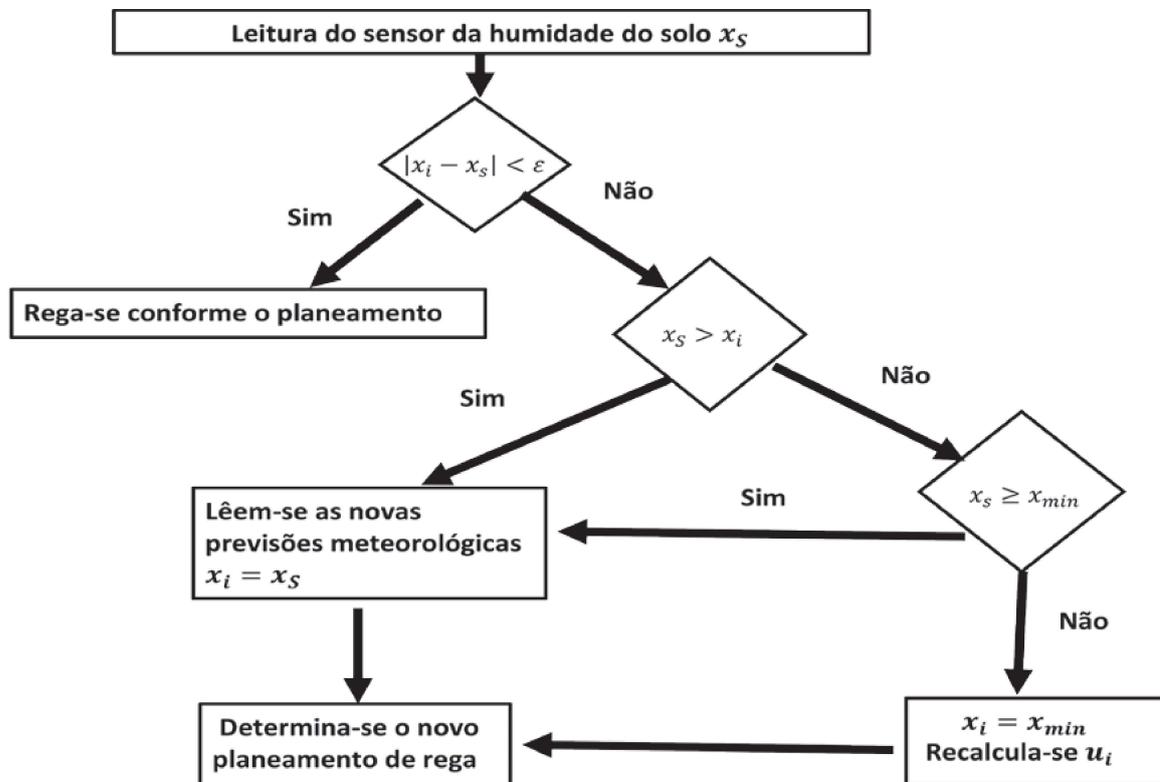


Figura 7. Fluxograma da estratégia de replaneamento, controlo preditivo.

5. COMENTÁRIOS FINAIS

Consideramos o problema de minimização do desperdício de água em irrigação e abordamos a sua resolução com técnicas matemáticas de modelação, otimização e controlo. Descrevem-se alguns resultados desenvolvidos no âmbito de um projeto de investigação e desenvolvimento que envolveu diversas instituições de Ensino Superior do norte do País. A investigação realizada neste projeto permitiu concluir que é possível reduzir o consumo total de água usada na irrigação, respeitando as necessidades hidrológicas da cultura. Foram implementadas técnicas de controlo ótimo e de controlo preditivo que têm em conta desvios relativamente ao modelo desenvolvido, erros nas previsões meteorológicas, crescimento atípico da planta, entre outras incertezas. Desenvolveu-se um algoritmo que considera múltiplos pontos de irrigação e que faz a redistribuição da água pelos pontos em que há défice de água. Em trabalho futuro, pretende-se continuar a desenvolver um protótipo de fácil utilização, implementável em qualquer cultura e em qualquer local.

REFERÊNCIAS

- [1] Allen, R. G., Pereira, L. S., Raes, D., Smith, M., et al. "Crop Evapotranspiration - for Computing Crop Water Requirements. Fao Irrigation and Drainage Paper 56." *FAO, Rome*, 300(9):D05109, 1998. ISBN 92-5-104219-5
- [2] Horton, R. E. "An Approach Toward a Physical Interpretation of Infiltration-Capacity 1". *Soil Science Society of America Journal*, Vol. 5(C), pp. 399-417, 1941. <https://doi.org/10.2136/sssaj1941.036159950005000C0075x>
- [3] Lamnabhi-Lagarrigue, F., A. Annaswamy, S. Engell, A. Isaksson, P. Khargonekar, R. M. Murray, H. Nijmeijer, T. Samad, D. Tilbury, P. Van den Hof. "Systems & Control for the Future of Humanity, Research Agenda: Current and Future Roles, Impact and Grand Challenges", *Annual Reviews in Control*, Vol. 43, pp. 1-64, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ar.control.04.001>.
- [4] Lemos-Paião, A. P., Lopes, S. O. and de Pinho, M.D.R.. "Analytical Study for Different Extremal State Solutions of an Irrigation Optimal Control Problem with Field Capacity Modes". *Journal of Applied and Computational Mathematics*, Vol. 8 (2), pp. 1-27, 2022. <https://doi.org/10.1007/s40819-022-01266-9>
- [5] Lopes, S. O., Fontes, F. A., Pereira, R., de Pinho, M. D. R. and Gonçalves, A. M.. "Optimal Control Applied to an Irrigation Planning Problem". *Mathematical Problems in Engineering*, 2016. <https://doi.org/10.1155/2016/5076879>
- [6] Lopes, S. F., Pereira R. M. S., Lopes S. O., Coutinho, M., Malheiro, A., Fonte, V. "Yet a Smarter Irrigation System". *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering book series LNICST*, 323, 2020. <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-51005-3-28>.
- [7] Lopes, S. O., Pereira, R. M., Pereira, P. A., Caldeira, A. C. and Fontes, F. "Optimal control applied to an irrigation planning problem: a real case study in Portugal". *International Journal of Hydrology Science and Technology*, Vol. 9 (2), pp.173-188, 2019. <https://doi.org/10.1504/IJHST.2019.098161>
- [8] Pereira, L. S. *Necessidades de água e métodos de rega*. Ed. Europa-América, Lisboa, 2004. ISBN: 5601072370609
- [9] Pereira, R., Lopes, S., Costa, M.F., Haie, N. and Fontes, F. "Modelling of Smart Irrigation with Replan and Redistribution Algorithms". *Journal of Sustainable Development of Energy, Water and Environment Systems*, Vol. 10 (3), pp. 1-17, 2022. <https://doi.org/10.13044/j.sdewes.d9.0409>
- [10] da Silva, E., Lima, J., Azevedo, J. Rodrigues, M. "Valores de Tensão na Determinação da Curva de Retenção da Água de Solos do Cerrado". *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, Vol. 41 (3), pp. 323-330, 2006. <https://doi.org/10.1590/S0100-204X2006000200018>
- [11] To Chair. Página do projeto *To Chair - The Optimal Challenges in Irrigation* (POCI-01-0145-FEDER-028247) <https://sofialope6.wixsite.com/to-chair>
- [12] United Nations. *Sustainable Development Goals*, <https://sdgs.un.org/goals>.
- [13] United Nations. *ONU News, Perspectiva Global Reportagens Humanas*. <https://news.un.org/pt/story/2022/07/1794942>
- [14] United Nations. *The Sustainable Development Goals Report 2022*, United Nations, 2022. <https://unstats.un.org/sdgs/report/2022/>
- [15] Vinter, Richard B. *Optimal control*. Boston: Birkhäuser, 2010. ISBN-13 978-0817649906

SOBRE OS AUTORES

Sofia O. Lopes é professora auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade do Minho e investigadora Centro de Física das Universidades do Minho e do Porto (CF-UM-UP) e do Systemc-ISR/ARISE. Licenciou-se em Ensino de Matemática na Universidade de Aveiro. Obteve o mestrado e o doutoramento na área da matemática na Universidade do Minho. Os seus interesses de investigação centram-se nas áreas de Otimização e Controlo, tendo ultimamente abordado aplicações ao ambiente. Participou como investigadora em diversos projetos de investigação e desenvolvimento, nacionais e europeus, na área da matemática. Coordenou o projeto *To-Chair The Optimization Challenges in Irrigation* que desenvolveu ferramentas para minimizar os desperdícios de água na irrigação.

Fernando A. C. C. Fontes é professor associado com agregação na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP) e Investigador do Systemc-ISR/ARISE. Obteve o doutoramento no Imperial College London, Reino Unido. Iniciou a carreira no Departamento de Matemática da Universidade do Minho, lecionou na London School of Economics and Political Science da Universidade de Londres, foi investigador no Imperial College London, e mais recentemente, foi professor visitante na Texas A & M University, Estados Unidos. Na Universidade do Minho desempenhou funções de diretor de curso da licenciatura em Matemática Aplicada e, posteriormente, diretor do departamento. Os seus interesses de investigação centram-se nas áreas de Otimização e Controlo, tendo ultimamente abordado aplicações à robótica, à energia e ao ambiente.

Secção coordenada pela **PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação** pt-maths-in@spm.pt

TARDES DE MATEMÁTICA

Conversas Ímpares

12 NOV. 2022, 15h00

Como a Matemática pode salvar a tua vida

Adérito Araújo
(CMUC, DM-FCTUC)

14 JAN. 2023, 15h00

Galileu: a acne solar e os planetas com orelhas

Fernando Figueiredo
(CITEUC, DM-FCTUC)

11 MAR. 2023, 15h00

Matemática, Magia e Mistério

Márcio Nascimento, Nuno Bastos
e Nuno Conceição
(ESTGV-IPV)

13 MAI. 2023, 15h00

Paradoxos da Estatística: os números contam histórias...

Rui Pascoal
(CEBER, FEUC)

8 JUL. 2023, 15h00

Uma viagem sobre rodas e estradas exóticas

Fátima Leite
(ISR-UC, DM-FCTUC)

EXPLORATÓRIO
Entrada Livre

Iniciativa da SPM-centro

Coorganizado por:



Cofinanciado por:

