



JOSÉ CARLOS SANTOS  
Universidade  
do Porto  
jcsantos@fc.up.pt

## É NATURAL QUERER SABER SE O NÚMERO 0 É NATURAL

Recentemente, o número 0 passou a ser considerado um número natural. Mas, afinal, é ou não é natural?

Segundo os novos programas do Ensino Secundário, passará a ser ensinado que 0 é um número natural, ou seja, que o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais é o conjunto  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  e não, como até agora, o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Isto causou alguma estranheza entre os professores e levou alguns destes a querer ter uma resposta à seguinte pergunta: afinal, 0 é ou não um número natural?

À primeira vista, a pergunta parece ser uma pergunta legítima de matemática. Acontece que, sendo legítima, não é realmente uma pergunta de matemática, pelo menos se entendermos por isto uma pergunta que leva a uma resposta sob a forma de uma demonstração matemática. Isto porque 0 ser ou não um número natural é uma questão de convenção e não uma questão matemática.

Pode parecer estranho, mas a matemática tem um grande número de convenções. Antes de falar de outras, voltemos ao exemplo dos números naturais.

Se quisermos ser totalmente rigorosos, poderemos ser tentados a responder à questão de saber se 0 é ou não um número natural recorrendo aos axiomas de Peano. Afinal, são estes axiomas que são geralmente empregues quando se pretende estudar os números naturais de um ponto de vista axiomático. Então, a pergunta é: para Giuseppe Peano, o número 0 era ou não um número natural? Acontece que a resposta é ambígua: na sua formulação original<sup>1</sup> os

naturais começavam em 1, mas, num texto posterior<sup>2</sup>, os naturais começavam em 0. E, além disso, mesmo que Peano tivesse só adotado uma das possibilidades, isso não seria motivo para que, posteriormente, não fosse adotada a outra.

Como 0 ser ou não um número natural é apenas uma convenção, é natural que a adoção de uma ou da outra das possibilidades varie de local para local. De facto, também varia bastante entre áreas científicas. Por exemplo, é muito mais frequente que 0 seja visto como um número natural em combinatória ou em informática teórica<sup>3</sup>, mas no caso da análise é de longe mais frequente que os naturais comecem em 1.

Vejam os mais alguns exemplos de convenções que surgem na matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Uma das mais básicas é o sistema de numeração que usamos, que é em base 10. E usamos essa base somente por hábito; não há nada de intrinsecamente melhor que aquela base tenha em relação a outras. De facto, a base 12 tem algumas vantagens relativamente à base 10 e há alguns povos que a usam.<sup>4</sup> Os antigos babilónios tra-



Giuseppe Peano

balhavam em base 60 (o que faz com que, até aos nossos dias, as horas e os graus sejam divididos em 60 minutos e os minutos em 60 segundos). E, como é sabido, em informática teórica usa-se base 2.

Outro exemplo de convenção surge com os fatoriais. Se  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ , define-se  $n!$  como sendo o produto  $1 \times 2 \times \dots \times n$ . Mas, além disso, convencionou-se que  $0! = 1$ . Há um bom motivo para isto: para que seja válida a regra  $n! = n \times (n - 1)!$  mesmo quando  $n = 1$ . De facto, é possível definir  $n!$  de maneira a abranger 0!; basta definir  $n!$  como sendo o número de permutações de um conjunto com  $n$  elementos. Isto funciona... mas pelo preço de ser necessário explicar porque é que há uma e só uma bijeção do conjunto vazio nele próprio.

Ainda outro exemplo reside no conceito de número primo. Se se definir “número primo” como sendo um número sem outros divisores além dele próprio e de 1, então 1 é primo. Hoje em dia, o normal é que não se veja 1 como um número primo e, para se conseguir isso, a definição que se usa é ligeiramente diferente da anterior; pode-se impor logo à partida que o conceito de número primo só se aplica a números maiores do que 1, ou então dizer que um número é primo quando tem exatamente dois divisores. Mas durante muito tempo, 1 foi visto como um número primo. Por exemplo, G. H. Hardy considerou 1 como sendo primo nas primeiras seis edições do seu *A Course in Pure Mathematics* (veja-se [2]) e só a partir da sétima edição é que deixou de o considerar como tal.<sup>5</sup>

No entanto, não se deve pensar que todas as convenções têm o mesmo valor. Algumas são mais cómodas do que outras e algumas prestam-se a menos confusões do que outras. E há outros fatores a levar em conta. Por exemplo, a mudança de convenções no ensino leva inevitavelmente a uma diminuição da possibilidade de ajuda entre pessoas de gerações diferentes.

Finalmente, convém ter em conta o facto de a ISO (*International Organization for Standardization*) advogar, na sua norma ISO 80000-2,<sup>6</sup> que o símbolo  $\mathbb{N}$  (ou  $\mathbf{N}$ ) representa o conjunto dos números naturais, o qual é o conjunto  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  devendo o conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$  ser representado por  $\mathbb{N}^*$  ou por  $\mathbf{N}^*$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] H. Kennedy, *Giuseppe Peano*, Birkhäuser, 1974.
- [2] G. H. Hardy, *A Course in Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1967.

<sup>1</sup> *Arithmetices Principia: Nova Methodo Exposita* (1889) [em latim]; URL: <https://archive.org/details/arithmeticespri00peangoog/page/n6/mode/2up>

<sup>2</sup> *Formulario Mathematico* (1894) [em latim]; veja-se [1]

<sup>3</sup> Veja-se *Why Numbering Should Start at Zero*, de E.W. Dijkstra; URL: <https://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD08xx/EWD831.html>

<sup>4</sup> Shuji Matsushita, *Decimal vs. Duodecimal: An Interaction Between Two Systems of Numeration*; URL: [https://web.archive.org/web/20081005230737/http://www3.aa.tufs.ac.jp/~P\\_aflang/TEXTS/oct98/decimal.html](https://web.archive.org/web/20081005230737/http://www3.aa.tufs.ac.jp/~P_aflang/TEXTS/oct98/decimal.html)

<sup>5</sup> Evelyn Lamb, *Why Isn't 1 a Prime Number?*; URL: <https://blogs.scientificamerican.com/roots-of-unity/why-isnt-1-a-prime-number/>

<sup>6</sup> <https://www.sis.se/api/document/preview/80015337/>



SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Visite-nos em <https://clube.spm.pt>

