Jorge Nuno Silva
Universidade de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

YUPANA – O ÁBACO INCA

Um documento sul-americano do século XVII contém ilustrações de instrumentos de registo e, presumivelmente, de cálculo. A partir destas representações, várias teorias foram adiantadas quanto ao respectivo funcionamento. Apresentamos aqui a nossa opinião nesta matéria, ilustrando com alguns exemplos numéricos. Além das operações básicas da aritmética, o Yupana permite implementar algoritmos para as raízes e logaritmos, com naturalidade, assim como para a antifairese, útil na determinação do máximo divisor comum de dois números. As potencialidades do Yupana vão muito para além das dos ábacos mais conhecidos, nomeadamente o chinês *(Suanpan)* e o japonês (*Soroban*).

Em 1615, Felipe Guamán Poma de Ayala enviou um longo manuscrito ao rei Filipe III de Espanha (Filipe II de Portugal). Nele, descrevia a história dos povos andinos, a ascensão dos incas e o período da invasão espanhola no século XVI (ver [3] e [4]). Nesse manuscrito surge, entre várias outras, a ilustração seguinte.

Figura 1. *Contador Maior e Tesoureiro.*

O objecto nas mãos do contador é, sem dúvida, um *quipu*. Este artefacto destina-se fundamentalmente ao registo de informação quantitativa (ver, por exemplo, [7]).

No canto inferior esquerdo, surge um objecto que é natural supor destinar-se aos cálculos numéricos, o *yupana*. Em cada uma das cinco filas, há quatro quadrados, com, respectivamente e da direita para a esquerda, uma, duas, três e cinco pintas. Somos de opinião de que as filas se destinam a representar os diversos dígitos da numeração decimal, sendo a linha inferior destinada às unidades, a segunda às dezenas, e assim sucessivamente.

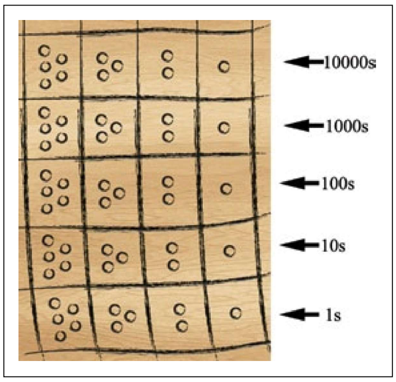

Figura 2. A ordem dos coeficientes decimais.

Uma marca colocada numa casa do *yupana* representará a quantidade gravada nesse local (1, 2, 3 ou 5). Se for na primeira fila tratar-se-á de unidades, se for na segunda de dezenas, etc.

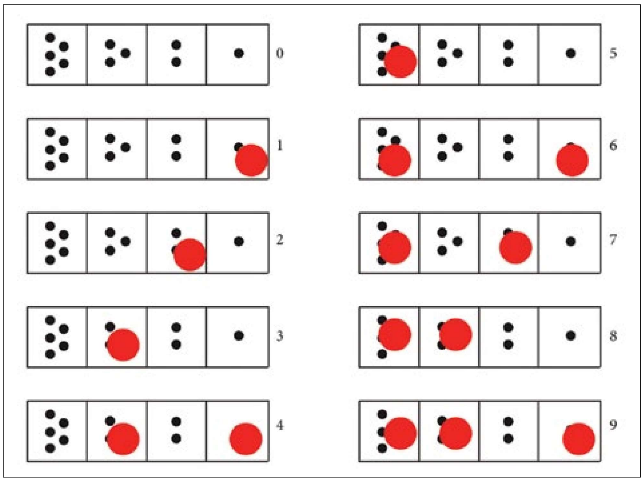

Figura 3. Os dígitos no *yupana*.

Há uma característica notável neste ábaco: podemos representar qualquer número sem necessitar de ter mais do que uma marca em qualquer casa. O leitor mais atento terá reconhecido nas denominações das células do *yupana* termos consecutivos da sucessão de Fibonacci...

A representação de cada número não é, em geral, única, mesmo com a restrição de não ter múltiplas marcas numa casa. Este facto permite reconhecer relações operatórias interessantes. As regras de transformação básicas são evidentes, pelo que as omito (tipo 3=2+1, 5+5=10, etc).

Vejamos como efectuar a soma de dois números. Para facilitar, vamos usar duas cores para introduzir as parcelas.

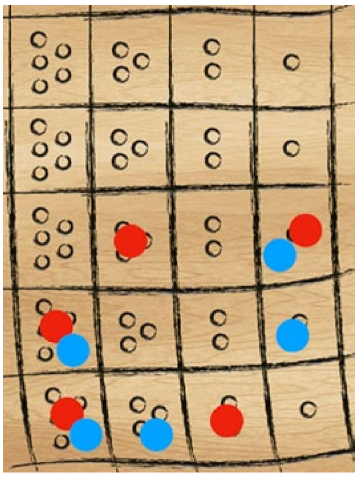

Figura 4. 457 + 168.

Usando somente uma cor e aplicando as regras de conversão, eliminando múltiplas marcas em cada casa e procurando a representação mais económica (que use menos marcas), obtemos, após alguns passos,

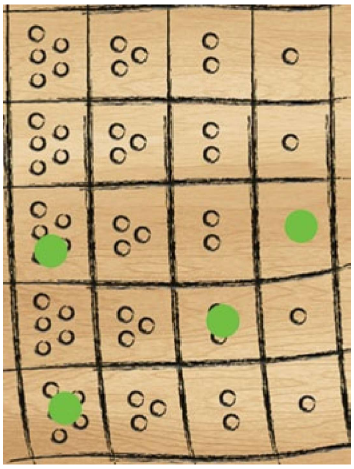

Figura 5. 457 + 168 = 625.

A subtracção implementa-se transformando a representação do aditivo de forma a podermos retirar do ábaco o subtractivo e uma cópia de si mesmo. Vejamos um exemplo.

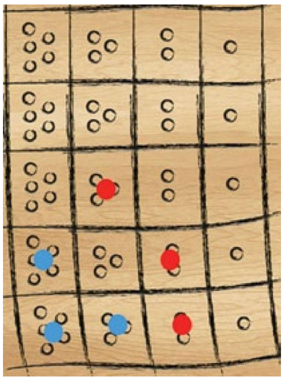

Figura 6. 322 – 58.

Transformando o aditivo convenientemente, obtemos:

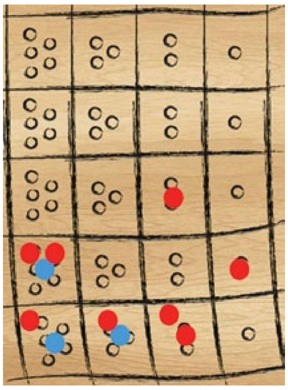

Figura 7. 322 – 58 (a caminho da resposta).

Agora, "rouba-se" o subtractivo ao aditivo e vê-se quanto sobrou:

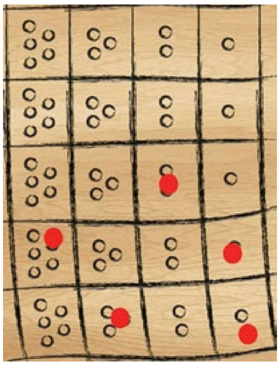

Figura 8. 322 – 58 = 264.

É fácil adaptar este método ao processo de subtracção recíproca iterada que nos dá o máximo divisor comum de dois números, isto é, o conhecido *Algoritmo de Euclides*.

A multiplicação torna-se simples, quando temos presente a lógica da representação numérica no *yupana*. Marcamos o multiplicando e, em cada casa ocupada nessa representação, colocamos o multiplicador. Depois, é só aplicar as regras de conversão. Vejamos um exemplo simples.

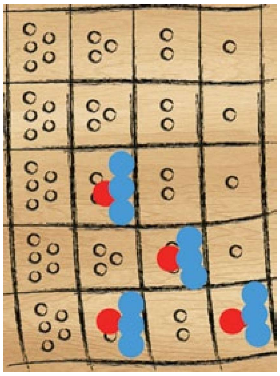

Figura 9. 324 × 3.

O resultado da operação já está representado no ábaco, falta somente simplificar essa representação para a tornar mais legível, tarefa para as regras de conversão.

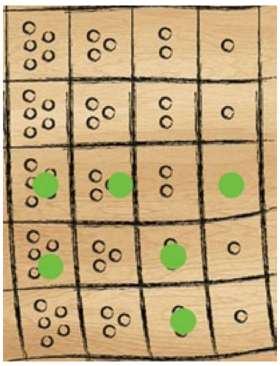

Figura 10. 324 × 3 = 972.

A divisão pode efectuar-se por subtracções sucessivas, procurando em cada momento o maior produto do divisor por uma potência de 10 que não exceda o dividendo. Visualmente, isto é fácil de conseguir, porque multiplicar por 10^n corresponde a mover as respectivas marcas n filas para cima.

Ilustremos o início de tal processo (uma divisão completa ocuparia muito espaço).

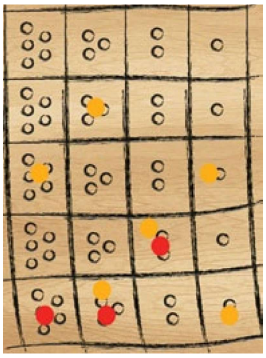

Figura 11. 3624 ÷ 28.

Multiplicando 28 por 100, obtemos:

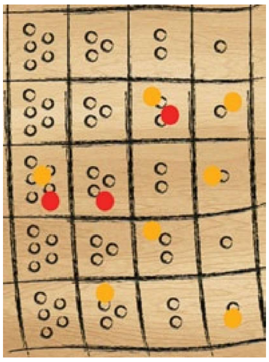

Figura 12. 3624 ÷ 28 (primeiro passo).

Após efectuar a subtracção 3624 – 2800, sabemos que o resto é menor do que 2800, pelo que contabilizamos 100 para o quociente e baixamos o dividendo uma linha (obtendo 280):

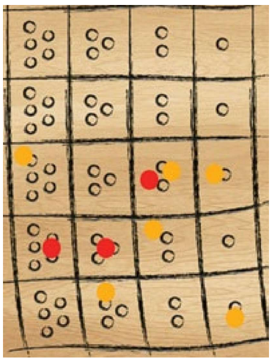

Figura 13. 3624 ÷ 28 (segundo passo).

Agora devemos subtrair 280 do dividendo tantas vezes quantas for possível. Por cada uma dessas subtracções contabilizamos dez unidades para o quociente. Procedendo deste modo, usando marcas negras no exterior do *yupana* para representar o quociente, chegaríamos à situação final:

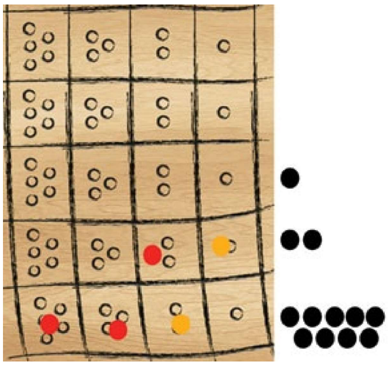

Figura 14. $3624 = 129 \times 28 + 12$.

Atendendo ao método descrito para efectuar multiplicações, não é difícil achar um procedimento para obter a parte inteira da raiz quadrada de um número: a partir da representação de um dado número m, procuremos o maior k tal que cada casa que intervém na representação de k contém k marcas. Ignoremos as sobras.

Procuremos $\sqrt{40}$.

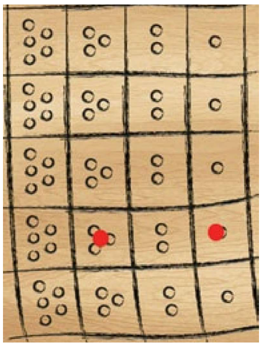

Figura 15. $\sqrt{40} = ?$

Manipulando as marcas, obtemos a seguinte representação de 40 (usamos duas cores para realçar a parte inteira):

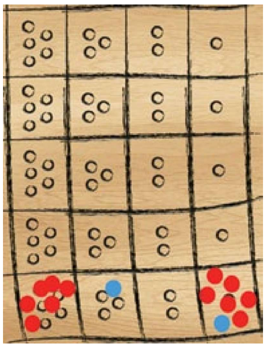

Figura 16. $40 = 6^2 + 4$.

As raízes de ordem superior tratam-se de forma análoga. Para obter $\sqrt[n]{m}$, procura-se o maior k de forma que cada casa que intervém na representação de k contenha k^{n-1} marcas.

Por exemplo, a seguinte configuração permite obter a parte inteira de $\sqrt[3]{70}$:

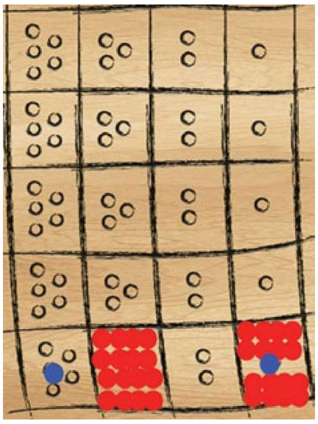

Figura 17. $70 = 4^3 + 6$.

Por fim, uma nota sobre logaritmos. Para obter $\log_n m$, introduzimos m no *yupana* e, manipulando as marcas, procuramos o maior k tal que cada casa da representação de n contém n^{k-1} marcas. Teremos então $k = \lfloor \log_n m \rfloor$. Ilustremos com $\log_4 100$:

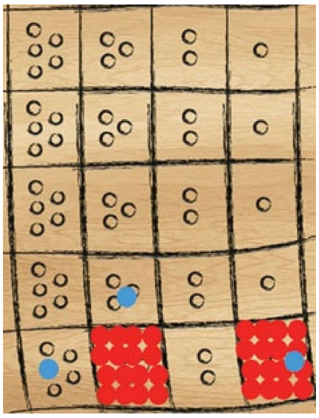

Figura 18. $100 = 4^3 + 36$.

Convidamos o leitor a experimentar este instrumento, fácil de implementar com papel, lápis e moedas, por exemplo. Gostaríamos de ter notícias de outras possibilidades do *yupana* que possam ter-nos escapado.

REFERÊNCIAS

[1] Altieri, R. A. e C. J. Mackey (1990). *Quipu y Yupana: Colección de Escritos.* Consejo Nacional de Ciencia y Tecnologa, Ministerio de la Presidencia

[2] Ascher, M. e R. Ascher (2013). *Mathematics of the Incas: Code of the Quipu*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications. isbn: 9780486152707.

[3] Ayala, F. G. P. (1615). *El Primer Nueva Corónica y Buen Gobierno.*

[4] Ayala, F. G. P. e R. Hamilton (2010). *The First New Chronicle and Good Government: On the History of the World and the Incas up to 1615.* Joe R. and Teresa Lozano Long Series in Latin American and Latino Art and Culture. University of Texas Press. isbn: 9780292779266.

[5] Moscovich, V. R. (2006). "Yupana – Tabla de Contar Inca". Em: *Revista Andina* 43.

[6] Moscovich, V. R. (2008). *Del Número al Cálculo en el Imperio Inca*. Em: ed. por Paola González Carvajal e Tamara L. Bray. BAR International Series 1848, pp. 91-101.

[7] Moscovich, V. R. (2016). *El Khipu y la Yupana: Administración y Contabilidad en el Imperio Inca*. Ediciones El Lector. isbn: 9786124720543.

[8] Prem, Dhavit (2017). *Yupana Inka*. Lima, Peru: Saldívar Olazo, Carlos Gabriel.

[9] Prem, Dhavit (2021). *P'AWAQ YUPANA – El potente Neo-Awaku Andino*. Tawa Pukllay – Indoarábico.

[10] Setlak, M. et al. (2020). *Quipus and Quipucamayoc. Encoding and Administration in Ancient Peru.* EY, Ernst & Young Perú.

[11] Tun, Molly (2014). "Yupana". *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. doi: 10.1007/978-94-007-3934-5_10273-1.

[12] Wartensteiner, Gerald (2021). *Mysterious Yupana: Abacus + Game*. Kindle.

SOBRE O AUTOR

Jorge Nuno Silva. Doutor em Matemática por Berkeley. Professor aposentado da FCUL. Presidente da Associação Ludus. Tem desenvolvido atividade relevante na área da matemática Recreativa e dos Jogos Matemáticos, nomeadamente a nível de publicações.

Coordenação do espaço HISTÓRIAS DA MATEMÁTICA:
Jorge Nuno Silva, Universidade de Lisboa, *jnsilva@cal.berkeley.edu*