

## TERNOS PITAGÓRICOS E TIJOLOS DE EULER

O título deste *Canto Délfico* é o mesmo de uma jornada da Liga Delfos, cujos problemas aqui apresentamos. Começando por explicar o que é a Liga Delfos, introduzimos de seguida o que são os tijolos de Euler. Estes objetos matemáticos constituem um análogo espacial do familiar conceito de terno pitagórico. Destacamos o problema em aberto sobre a existência ou não de tijolos de Euler perfeitos.

### 1. INTRODUÇÃO

A *Escola Delfos*<sup>1</sup> organiza-se em torno de estágios de dois dias, congregando na Universidade de Coimbra estudantes dos ensinos Básico e Secundário, com uma regularidade de aproximadamente mensal. Estes estudantes são referidos como sendo os *délficos*.

Uma atividade-farol da Escola Delfos é a *Liga Delfos*. A Liga Delfos é uma competição entre equipas de délficos, decorrendo nos seus estágios. Cada edição corresponde a um ano letivo, e está dividida em cerca de sete jornadas, garantindo que a maioria dos estágios conte com uma jornada na sua programação. Em geral, cada jornada tem a duração de duas horas e meia, e cada edição tem cinco equipas. A Liga Delfos foi criada em 2004 por Jorge Neves, o qual por largos anos a organizou e moldou. Contou ainda com vários outros organizadores ao longo da sua história.

O autor destas notas pode testemunhar o quão entusiasmante é a Liga Delfos para os seus participantes. A Liga Delfos fomenta a partilha de conhecimentos, facilitada pela camaradagem. A competição entre as equipas é amigável e bem humorada, como o demonstram os nomes que as equipas escolhem para si, frequentemente associados a objetos, conceitos e problemas matemáticos com que os délficos se deparam. Exercendo o seu habitual bom humor, vários délficos pediram a certa altura ao autor destas notas que preparasse uma jornada envolvendo de alguma forma a palavra "Tijolo", a qual já fazia parte

do nome de uma equipa. Acedeu com gosto, organizando uma jornada intitulada *Ternos Pitagóricos e Tijolos de Euler*, que decorreu a 7 de outubro de 2017. Neste *Canto Délfico*, espreitamos um pouco a Liga Delfos, propondo ao leitor os problemas dessa jornada. Antes disso, fazemos uma breve contextualização dos problemas.

### 2. TIJOLOS DE EULER



Figura 1. Leonard Euler<sup>2</sup> (1707-1783).

<sup>1</sup> <https://www.uc.pt/fctuc/dmat/delfos>

<sup>2</sup> Imagem do domínio público, retirada de <https://www.nndb.com/people/954/000048810>

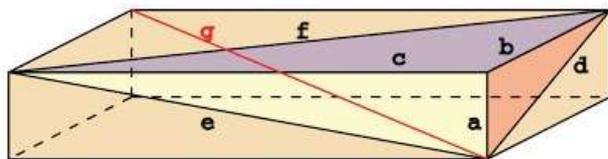


Figura 2. Ilustração<sup>3</sup> de um tijolo com dimensões  $a, b, c$ , diagonais faciais  $d, e, f$ , e diagonal espacial  $g$ .

Um paralelepípedo retangular (i.e., um prisma de base e faces retangulares) é um *tijolo de Euler* se todas as suas arestas e diagonais faciais têm comprimentos inteiros. Estes objetos matemáticos devem o seu nome às investigações sobre eles feitas pelo afamado matemático suíço Leonard Euler (1707-1783). O tijolo de Euler de menor volume tem dimensões 44, 117 e 240.

Um tijolo de Euler *perfeito* é um tijolo de Euler cuja diagonal espacial também é um inteiro. O problema da existência de um tijolo de Euler perfeito traduz-se em saber se o sistema de equações

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 \\ a^2 + c^2 = e^2 \\ b^2 + c^2 = f^2 \\ a^2 + f^2 = g^2 \end{cases}$$

tem uma solução apenas em inteiros (cf. figura 2). Não se sabe se existe algum tijolo de Euler perfeito [7].

Mais geralmente, um paralelepípedo (não necessariamente retangular) diz-se *perfeito* se todas as suas arestas, e todas as suas diagonais faciais e espaciais têm comprimento inteiro. Em 2011, Jorge F. Sawyer e Clifford A. Reiter provaram que existem paralelepípedos perfeitos (mas não retangulares), exibindo vários exemplos concretos, encontrados com recurso a força bruta computacional [11]. Num artigo de 2014, Sokolowsky et al. demonstraram a existência de uma família infinita de paralelepípedos perfeitos, dois a dois não semelhantes, cada um dos quais com exatamente duas faces não retangulares [12]. Nesta família, os ângulos das faces não retangulares podem ser tomados tão próximo de  $90^\circ$  quanto se queira. Nesse mesmo artigo, com base nos argumentos de prova aí utilizados, os seus autores conjecturam que não existe um tijolo de Euler perfeito.

Fazemos notar que a expressão "Tijolo de Euler" é de facto usada na literatura, no sentido técnico que aqui apresentamos (a expressão "cuboide racional" também aparece na literatura, com o mesmo significado). Isso facilitou muito a tarefa de descobrir um tema que fosse ao encontro do desejo dos délficos!

### 3. TERNOS PITAGÓRICOS

Uma equação *diofantina* é uma equação em várias variáveis no domínio dos inteiros. A resolução de equações diofantinas é um dos tipos de problemas mais abordados pelos délficos. Naturalmente, uma das equações que estudam é a equação  $x^2 + y^2 = z^2$ , que exprime o problema de achar triângulos retângulos de lados inteiros, os chamados *triângulos pitagóricos*. Um *terno pitagórico* é um terno  $(u, v, w)$  de inteiros positivos tal que  $u^2 + v^2 = w^2$ . Diremos também que o terno  $(a, b, c)$  é um terno de um tijolo de Euler, ou simplesmente que é um tijolo de Euler, se for o terno das três dimensões de um tijolo de Euler. Portanto, um terno de um tijolo de Euler é um terno pitagórico.

Um terno de inteiros positivos  $(a, b, c)$  diz-se *primitivo* se o máximo divisor comum de  $a, b, c$  é 1. Note-se que se  $a^2 + b^2 = c^2$ , então  $\text{mdc}(a, b, c) = 1$  se e só se cada par de inteiros no conjunto  $\{a, b, c\}$  é primo entre si. Acresce que todas as soluções inteiras da equação  $x^2 + y^2 = z^2$  são da forma  $(ka, kb, kc)$  em que  $k$  é um inteiro e  $(a, b, c)$  é um terno pitagórico primitivo.

É um bom exercício de iniciação verificar que se  $(u, v, w)$  é um terno pitagórico, então  $u$  ou  $v$  é par. A chave está em observar que os quadrados perfeitos pares são múltiplos de 4, enquanto que os quadrados perfeitos ímpares dão resto 1 quando divididos por 4.

A seguinte caracterização dos ternos pitagóricos primitivos é regularmente aprendida pelos délficos. Note-se que, sem perda de generalidade, basta-nos considerar ternos pitagóricos primitivos  $(u, v, w)$  em que  $u$  é par, pela observação feita no parágrafo anterior.

**Teorema.** *Seja  $(u, v, w)$  um terno de inteiros positivos em que  $u$  é par. O terno  $(u, v, w)$  é um terno pitagórico primitivo se e só se  $u = 2st$ ,  $v = s^2 - t^2$  e  $w = s^2 + t^2$ , para alguns inteiros positivos  $s, t$  primos entre si e tais que  $s - t$  é ímpar e positivo.*

*Demonstração.* Sejam  $s, t$  inteiros positivos primos entre si tais que  $s - t$  é um número positivo ímpar, e sejam

$$u = 2st, \quad v = s^2 - t^2 \quad \text{e} \quad w = s^2 + t^2.$$

Verifica-se diretamente que  $u^2 + v^2 = w^2$ . Se existe um primo  $p$  que divide  $u$  e  $v$ , então tal primo divide  $v + w = 2s^2$  e  $w - v = 2t^2$ . Como  $\text{mdc}(s, t) = 1$ , teremos então  $p = 2$ . Mas  $s - t$  é ímpar, pelo que  $v = (s - t)(s + t)$  é ímpar. Logo  $\text{mdc}(u, v) = 1$ , e portanto  $(u, v, w)$  é um terno pitagórico primitivo.

Reciprocamente, suponhamos que  $(u, v, w)$  é um terno

pitagórico primitivo tal que  $u$  é par. Então  $v, w$  são ímpares. Daí decorre que  $u^2 = w^2 - v^2 = (w + v)(w - v)$  é um múltiplo de 4, pelo que temos a seguinte fatorização de inteiros:

$$\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{w+v}{2} \cdot \frac{w-v}{2}$$

Se  $d$  é um divisor positivo comum dos inteiros  $\frac{w+v}{2}$  e  $\frac{w-v}{2}$ , então  $d$  divide

$$\frac{w+v}{2} + \frac{w-v}{2} = w \quad e \quad \frac{w+v}{2} - \frac{w-v}{2} = v$$

pelo que  $d = 1$ . Logo, a fatorização que obtivemos para  $\left(\frac{u}{2}\right)^2$  permite-nos concluir que existem inteiros positivos  $s, t$  primos entre si tais que

$$\begin{cases} \frac{w+v}{2} = s^2 \\ \frac{w-v}{2} = t^2 \end{cases}$$

e  $u = 2st$ . Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{cases} w = s^2 + t^2 \\ v = s^2 - t^2 \end{cases}$$

Como  $v^2 = (s - t)(s + t)$  é ímpar, necessariamente o número positivo  $s - t$  é ímpar.  $\square$

Este teorema é um exemplo de uma solução *paramétrica* de uma equação (ou sistema de equações) em inteiros, neste caso expressa em função dos parâmetros  $s, t$ . Existem muitas soluções paramétricas parciais do problema do Tijolo de Euler (cf. [9, 5]). Na secção seguinte referimos a solução do matemático inglês Saunderson (1682-1739), porventura a mais famosa, e que foi redescoberta por Euler [6]. A título de exemplo, temos a seguinte solução parcial paramétrica, obtida por Euler, distinta da atribuída a Saunderson:

$$\begin{cases} a = 2st(3s^2 - t^2)(3t^2 - s^2) \\ b = 8st(s^4 - t^4) \\ c = (s^2 - t^2)(s^2 - 4st + t^2)(s^2 + 4st + t^2) \end{cases}$$

onde  $s, t$  são inteiros (admitindo que  $a, b, c$  possam ser negativos).

#### 4. UMA JORNADA DA LIGA DELFOS

Nesta secção o leitor pode apreciar a lista dos sete problemas que surgiram no enunciado da jornada de 7 de

outubro de 2017 da Liga Delfos. O enunciado incluía uma breve contextualização do tópico. Os problemas foram extraídos de diversas fontes. Os seus graus de dificuldade são variados, sendo alguns deles meros exercícios introdutórios, enquanto o último problema é bastante mais difícil do que os precedentes.

Cada problema é um requerimento formulado na segunda pessoa do plural, refletindo o facto de que as respostas são trabalhadas em equipa.

#### Problemas de 7/10/17 da Liga Delfos

- Determinem todos os ternos pitagóricos primitivos da forma  $(40, v, w)$ .
  - Determinem todos os ternos pitagóricos  $(u, v, w)$  tais que  $u, v$  e  $w$  estão em progressão aritmética.
  - Determinem todos os triângulos pitagóricos de área igual ao perímetro.
- Provem que, para todo o inteiro  $n$  maior do que 12, existe um inteiro estritamente entre  $n$  e  $2n$  que é a área de um triângulo pitagórico.
- Mostrem que o raio da circunferência inscrita num triângulo pitagórico é sempre um inteiro.



Figura 3. Nicholas Saunderson<sup>4</sup> (1682-1739).

<sup>3</sup> By Gfis - [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler\\_brick.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler_brick.svg), CC BY-SA 4.0, <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>

<sup>4</sup> Imagem do domínio público, cf. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nicolas\\_Saunderson.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nicolas_Saunderson.jpg)

4. O matemático inglês Nicholas Saunderson (1682-1739) descobriu que se  $(u, v, w)$  é um terço pitagórico então

$$\left( |u(4v^2 - w^2)|, |v(4u^2 - w^2)|, |4uvw| \right)$$

é um terço de um tijolo de Euler (designemos estes ternos por ternos de Saunderson).

a) Verifiquem o resultado de Saunderson.

b) Verifiquem que se  $(u, v, w)$  é um terço pitagórico primitivo, então o terço

$$\left( |u(4v^2 - w^2)|, |v(4u^2 - w^2)|, |4uvw| \right)$$

é primitivo.

c) Sabendo que a equação diofantina  $x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$  não tem solução se  $xy \neq 0$ , provem que não existem tijolos de Euler perfeitos cujas dimensões sejam ternos de Saunderson.

5. Mostrem que o terço  $(85, 132, 720)$  define um tijolo de Euler que não é um tijolo cujas dimensões são dadas pela fórmula de Saunderson.

6. Mostrem que, num qualquer tijolo de Euler, para cada  $n \in \{5, 9, 11, 16\}$ , existe pelo menos uma aresta cujo comprimento é divisível por  $n$ .

7. Provem que a equação diofantina

$$x^4 + 18x^2y^2 + y^4 = z^2$$

não tem solução se  $xy \neq 0$ .

## 5. UM PROBLEMA SOBRENTE

Por regra, o enunciado de uma jornada da Liga Delfos tem sete problemas, de igual pontuação. Na preparação do enunciado sobram naturalmente problemas, ao almejar-se uma prova equilibrada em duração e composição. Eis um problema sobrenate cujo enunciado nos dá mais informações sobre os tijolos de Euler:

Verifiquem que se  $(x, y, z)$  é um tijolo de Euler então  $(xy, xz, yz)$  também é um tijolo de Euler, e que se  $(x, y, z)$  é um tijolo de Saunderson, então  $(xy, xz, yz)$  não é um tijolo de Saunderson.

Curiosamente, se repetirmos duas vezes a operação descrita neste problema, obtemos um tijolo de Euler semelhante ao inicial, pois a função  $f(x, y, z) = (xy, xz, yz)$  satisfaz a igualdade  $f^2(x, y, z) = xyz(x, y, z)$ . Em 1977,

E. Z. Chein provou que se  $(x, y, z)$  é um tijolo de Saunderson (não sendo, portanto, perfeito), então  $f(x, y, z)$  também não é um tijolo de Euler perfeito [4].

## 6. ONDE PROCURAR SOLUÇÕES

O problema 1 é um conjunto de exercícios de aquecimento sobre ternos pitagóricos. Estes e outros exercícios semelhantes podem ser encontrados no livro de Burton [3], onde também encontramos uma solução do problema 3 como um exemplo de aplicação da solução paramétrica da equação diofantina  $x^2 + y^2 = z^2$ .

O problema 2 apareceu na final das Olimpíadas Coreanas de Matemática de 1993 (cf. [1, 2]).

Como referência para os problemas 4, 6 e 7, temos o apêndice de um artigo de Knill [8]. Spohn observou em 1972 que a parametrização de Saunderson não produz tijolos de Euler perfeitos [13], aplicando o resultado enunciado no problema 7 e obtido em 1912 pelo inglês Henry Cabourn Pocklington [10].

## REFERÊNCIAS

- [1] <https://imomath.com/othercomp/Kor/KorMOF93.pdf>.
- [2] <https://math.stackexchange.com/questions/568547/korea-math-olympiad-1993>.
- [3] David M. Burton. *Elementary Number Theory*. McGraw-Hill, 7th edition, 2011.
- [4] E. Z. Chein. "On the Derived Cuboid of an Eulerian Triple". *Canadian Mathematical Bulletin. Bulletin Canadien de Mathématiques*, 20(4): 509–510, 1977.
- [5] W. J. A. Colman. "Some Observations on the Classical Cuboid and its Parametric Solutions". *The Fibonacci Quarterly. The Official Journal of the Fibonacci Association*, 26(4): 338–343, 1988.
- [6] Leonard Eugene Dickson. *History of the Theory of Numbers. Vol. II: Diophantine Analysis*. Chelsea Publishing Co., New York, 1966.
- [7] Richard K. Guy. *Unsolved problems in Number Theory*. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, third edition, 2004.
- [8] Oliver Knill. *The Babylonian Graph*, May 2022. arXiv:2205.13285v1 [math.CO].

[9] Maurice Kraitchik. *Théorie des Nombres. T. 3: Analyse Diophantine et Applications aux Cuboïdes Rationnels*. Paris: Gauthier- Villars, 1947.

[10] Henry C. Pocklington. "Some Diophantine Impossibilities". *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, 18: 110–118, 1912.

[11] Jorge F. Sawyer and Clifford A. Reiter. "Perfect Parallelepipeds Exist". *Mathematics of Computation*, 80(274): 1037–1040, 2011.

[12] Benjamin D. Sokolowsky, Amy G. VanHooft, Rachel M. Volkert, and Clifford A. Reiter. "An Infinite Family of Perfect Parallelepipeds". *Mathematics of Computation*, 83(289): 2441–2454, 2014.

[13] W. G. Spohn. "On the Integral Cuboid". *American Mathematical Monthly*, 79: 57–59, 1972.

# QUER SER SÓCIO DA SPM?

CONSTRUA UMA  
BANDA DE MÖBIUS  
COM ESTA PÁGINA

## COMO SER SÓCIO DA SPM

Para ser Sócio SPM basta preencher o formulário online, escolher a modalidade de quota e a forma de pagamento.

## JÁ FOI SÓCIO E QUER VOLTAR A SER?

Faça a adesão ao pagamento por débito direto e apenas pagará as quotas em atraso dos últimos dois anos. Contacte-nos!

## VALOR DE QUOTAS 2022:

Sócio Efetivo: 40 euros

Sócio Estudante: 20 euros  
(até aos 25 anos ou até aos 30 mediante comprovativo de frequência de mestrado).

Institucionais

Escolar: 80 euros

Académico: 400 euros

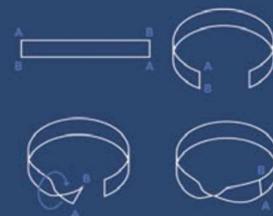
Corporativo: 600 euros

## CARTÃO DIGITAL DE SÓCIO SPM

A partir de agora, todos os sócios da SPM podem descarregar o seu cartão digital de sócio através da sua área pessoal. Deste modo, terão sempre disponíveis os seus cartões atualizados.

## VANTAGENS DOS SÓCIOS SPM:

- recebem gratuitamente a *Gazeta de Matemática* (quadrimestral) e o *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* (semestral).
- desconto na Loja (10% ou mais), nos eventos e ações do Centro de Formação SPM
- desconto de 50% no Pavilhão do Conhecimento
- desconto nos Livros IST Press e na Livraria Piaget de 30%.



**spm**  
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA



## INFORMAÇÕES

Av. da República, 45 3.º eq  
1050-187 - Lisboa

Tel.: 217 939 785

E-mail: [spm@spm.pt](mailto:spm@spm.pt)

[www.spm.pt](http://www.spm.pt)



A

B

B

A