

## À PROCURA DE ANTISSIMETRIAS NAS FACHADAS DE AZULEJOS EM PORTUGAL

ANDREIA HALL<sup>a</sup>, JOÃO NUNES<sup>b</sup>, ANTÓNIO PEREIRA<sup>c</sup> E PAOLO VETTORI<sup>d</sup>

CIDMA – CENTRO DE INVESTIGAÇÃO E DESENVOLVIMENTO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES,  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE AVEIRO<sup>a, b, c, d</sup>

andrea.hall@ua.pt<sup>a</sup>, nunes.joaol@gmail.com<sup>b</sup>, antoniop@ua.pt<sup>c</sup> e pvettori@ua.pt<sup>d</sup>

**A**simetria (e seus derivados, como é o caso da antissimetria) é uma característica muito importante na percepção visual do mundo que nos rodeia, tanto na natureza como nas construções humanas. A azulejaria faz parte da cultura portuguesa e muitas são as fachadas de edifícios revestidas de azulejos, com os mais variados motivos. Fomos à procura de padrões de azulejos com antissimetria e encontramos exemplos muito diversos, não apenas no estilo/época como também nas propriedades matemáticas (grupos de antissimetria).

## INTRODUÇÃO

Portugal tem uma longa tradição de utilização de azulejos no revestimento de fachadas de edifícios. A maioria das fachadas é revestida de forma regular, formando-se padrões periódicos em duas direções. Além das simetrias de translação inerentes a qualquer padrão periódico, a maior parte das fachadas apresenta também outros tipos de simetria (de reflexão, de rotação ou de reflexão deslizante).

Sempre que um padrão (ou figura) é construído apenas com duas cores, é possível existirem antissimetrias que não são mais do que simetrias acopladas a uma troca das cores que deixam o padrão invariante. Muitos dos azulejos usados nas fachadas portuguesas envolvem apenas duas cores, sendo o azul e branco uma combinação muito frequente. Decidimos ir à procura de padrões com antissimetria nas fachadas de azulejos e encontramos exemplos em várias localidades portuguesas. Uma primeira recolha deu origem ao artigo de Nunes et al. (2022). No presente trabalho, que tem por base essa primeira recolha complementada com outros exemplos, apresentamos os padrões que encontramos e que revelam uma grande diversidade quer no que respeita ao tipo de antissimetria quer no que respeita ao estilo e à época.

## ANTISSIMETRIA

A simetria é uma característica muito importante na percepção visual de imagens e tem sido um elemento recorrente na arte, na arquitetura e noutros artefactos da construção humana desde há milénios (Westphal-Fitch et al., 2012, pp. 2007-2008). A simetria em si incorpora a noção de repetição, regularidade ou congruência. Como diz Wade (2006, p. 1), a simetria é um princípio universal e “é tão importante para matemáticos quanto para artistas, e tão relevante para a física quanto para a arquitetura”. No entanto, excesso de repetição e regularidade provoca monotonia e faz perder o interesse, pelo que não é de estranhar que qualquer noção de simetria esteja intrinsecamente entrelaçada com a de assimetria ou quebra de simetria. Uma maneira de perturbar a simetria sem a destruir completamente é usando a antissimetria. Assim como a simetria, a antissimetria pode ser encontrada em produções humanas desde tempos pré-históricos (Radovic & Jablan, 2001, p. 58).

Em geometria, uma simetria de uma figura é uma isometria que a deixa invariante. O conjunto de simetrias de uma figura  $F$ , juntamente com a operação composição de isometrias, forma um grupo que é conhecido como o grupo de simetria de  $F$ . Um grupo de simetria pode ser discreto ou contínuo. A maioria das figuras que nos interessa tem grupos discretos. No plano, existem apenas três categorias de grupos de simetria discretos: rosáceas (que têm um número finito de simetrias que só podem ser rotações ou reflexões); frisos (que têm simetria de translação em apenas uma direção) e padrões (que têm simetria de translação em duas direções). Existem dois tipos de grupos de simetria de rosáceas, sete tipos de grupos de frisos e 17 tipos de grupos de padrões. Na literatura, podemos encontrar diferentes notações para os vários grupos de simetria. Neste trabalho, denotamos por  $C_n$  os grupos cíclicos de rosáceas, que contêm  $n$  rotações, múltiplas de  $360^\circ/n$  ( $C_1$  é a identidade), e por  $D_n$  os grupos diedrais de rosáceas, constituídos pelas rotações de  $C_n$  e por  $n$  reflexões (por exemplo,  $D_4$  é o grupo de simetria de um quadrado). A figura 1 mostra alguns exemplos de rosáceas e respetivos grupos de simetria.

No que respeita aos padrões, neste trabalho iremos usar a notação cristalográfica:  $p1$ ,  $p2$ ,  $pm$ ,  $pg$ ,  $pmm$ ,  $pmg$ ,  $pgg$ ,  $cm$ ,  $cmm$ ,  $p4$ ,  $p4m$ ,  $p4g$ ,  $p3$ ,  $p3m1$ ,  $p31m$ ,  $p6$ ,  $p6m$ . A classificação do grupo de simetria de um padrão pode ser feita usando o fluxograma proposto por Washburn e Crowe (1988) e que se encontra na figura 2. Mais detalhes sobre grupos de simetria podem ser encontrados

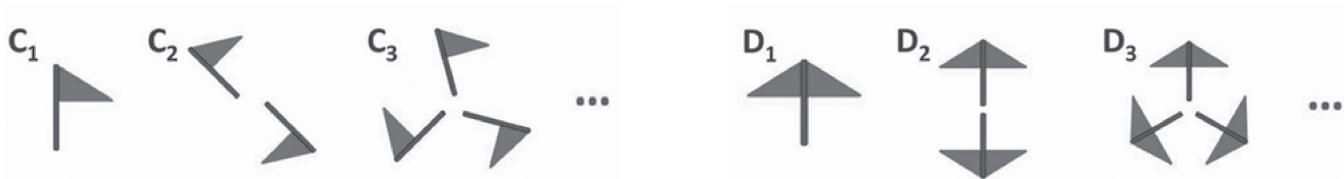


Figura 1: Exemplos de rosáceas com grupos de simetria  $C_n$  e  $D_n$ .

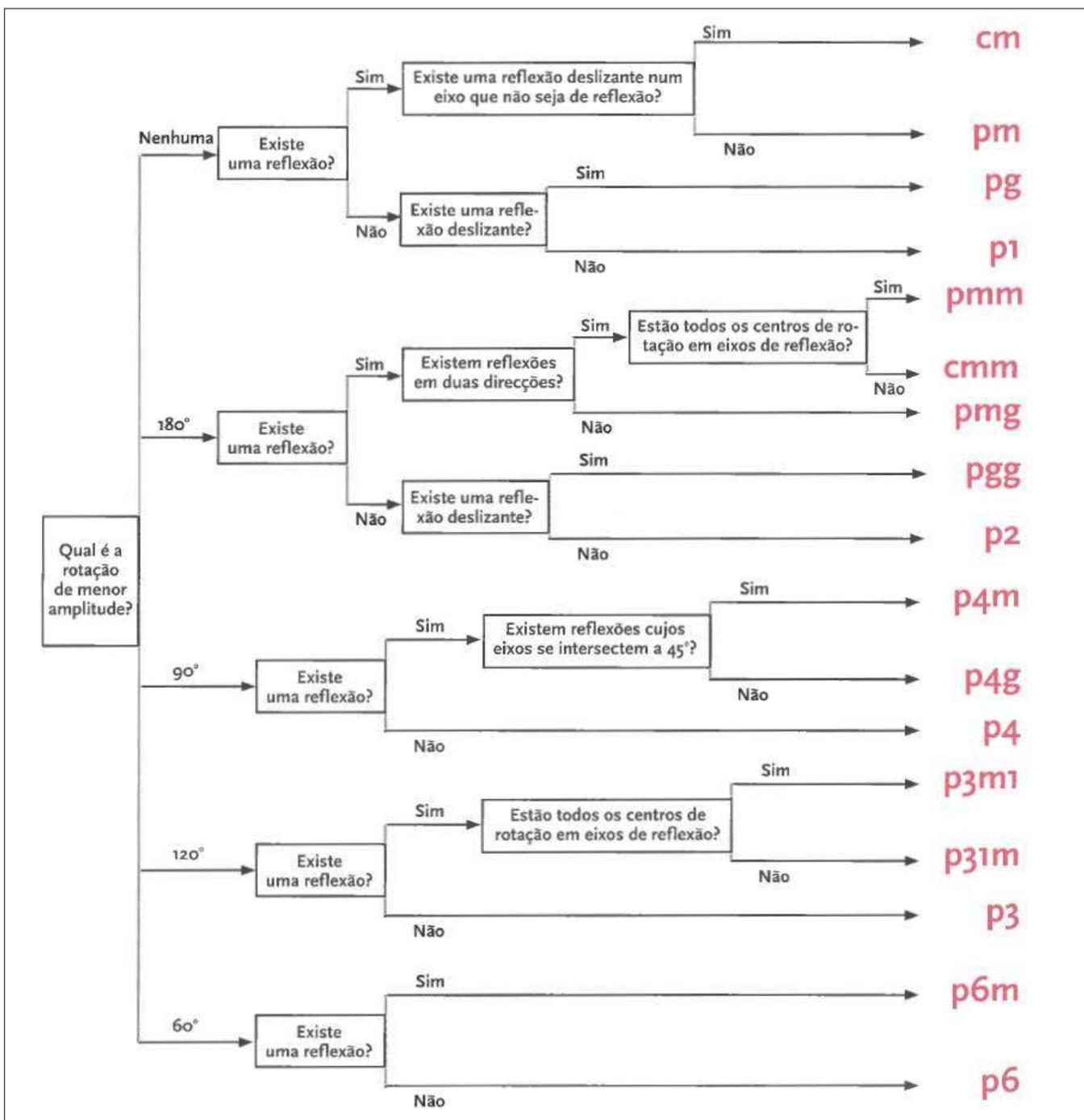


Figura 2: Fluxograma de Washburn e Crowe para classificação de padrões (Veloso, 2012, p. 128).

em Martin (1982) ou em Veloso (2012).

A antissimetria (também conhecida como simetria bicolor) está intimamente ligada ao conceito de simetria e pode ocorrer sempre que cada ponto de uma figura ou de um objeto tenha associada uma característica dicotômica, como uma de duas cores, uma de duas cargas elétricas, etc. Uma antissimetria pode ser definida como uma simetria acoplada a uma troca de cores (ou troca do valor da variável dicotômica) que deixa a figura ou o objeto invariante. Como existem quatro tipos possíveis de simetria no plano, também existem quatro tipos possíveis de antissimetria no plano. O conjunto de todas as antissimetrias e simetrias de uma figura também forma um grupo. Os grupos de antissimetria podem ser derivados dos grupos de simetria acoplando um grupo de permutação com apenas dois elementos, a transformação de mudança de cor (ver Radovic e Jablan (2001) para mais detalhes sobre antissimetria). A classificação e designação dos grupos de antissimetria pode ser feita através da análise do grupo de simetria da figura sem coloração (apenas com contornos),  $G_u$ , e do grupo de simetria da figura colorida,  $G_c$ . A designação do grupo de antissimetria é simplesmente  $G_u|G_c$ . A figura 3 ilustra este processo através do bem conhecido símbolo yin-yang, que é um exemplo de uma figura antissimétrica. O símbolo yin-yang exibe algum tipo de apelo simétrico

(dado pela antissimetria de rotação) apesar de não ter simetria. Sem coloração, o grupo de simetria é  $C_2$  enquanto com a coloração o grupo de simetria é  $C_1$ . Portanto, o grupo de antissimetria é  $C_2|C_1$ .

Grunbaum e Shephard (1987, pp. 402-413) fornecem uma descrição dos grupos de antissimetria, com exemplos para cada grupo. Estes grupos são mais diversos do que os de simetria: existem 17 grupos de antissimetria de frisos e 46 grupos de antissimetria de padrões. Quanto aos grupos de antissimetria de rosáceas, podem ser dos tipos  $D_n|C_m$ ,  $D_n|D_m$  e  $C_n|C_m$ , sendo  $m$  necessariamente divisor de  $n$ .

### FACHADAS DE AZULEJOS COM ANTISSIMETRIA EM PORTUGAL

Portugal tem uma longa tradição em azulejos, não só em painéis artísticos (igrejas e outros monumentos), mas também em fachadas de edifícios. Existem já alguns estudos sobre a matemática das fachadas de azulejos, entre os quais destacamos o realizado pelo Atractor (2018) com ligação ao programa GeCla que permite criar e classificar padrões, frisos e rosáceas.

Alguns azulejos usados nas fachadas portuguesas são antissimétricos e facilmente produzem padrões antissimétricos. Um desses azulejos é o azulejo de Truchet, composto por um quadrado dividido por uma das diagonais em dois triângulos de cores diferentes. O nome Truchet remonta ao século XVIII, em homenagem ao padre francês Sébastien Truchet, que explorou vários padrões feitos a partir deste motivo. No entanto, muito antes de Truchet utilizou-se este motivo em diversos exemplos de arte ornamental humana. Por exemplo, Radovic e Jablan (2001, p. 60 e 64) dão exemplos de frisos e padrões do período Neolítico. O azulejo de Truchet é ele próprio antissimétrico e tem grupo de antissimetria  $D_2|D_1$ . Dependendo da disposição dos azulejos, diferentes rosáceas/frisos/padrões, e, portanto, diferentes grupos de simetria e antissimetria podem ser obtidos.

Nunes et al. (2022) apresentam alguns exemplos de painéis de azulejos de artistas portugueses utilizando azulejos de Truchet. Neste trabalho iremos focar-nos apenas nas fachadas de edifícios com padrões periódicos. Os azulejos de Truchet mais tradicionais utilizados em fachadas de edifícios habitacionais em Portugal são geralmente azuis e brancos (em Espanha são verdes e brancos). As figuras 4 a 9 mostram fotos de fachadas com azulejos de Truchet, exibindo padrões antissimétricos, em várias localidades portuguesas.

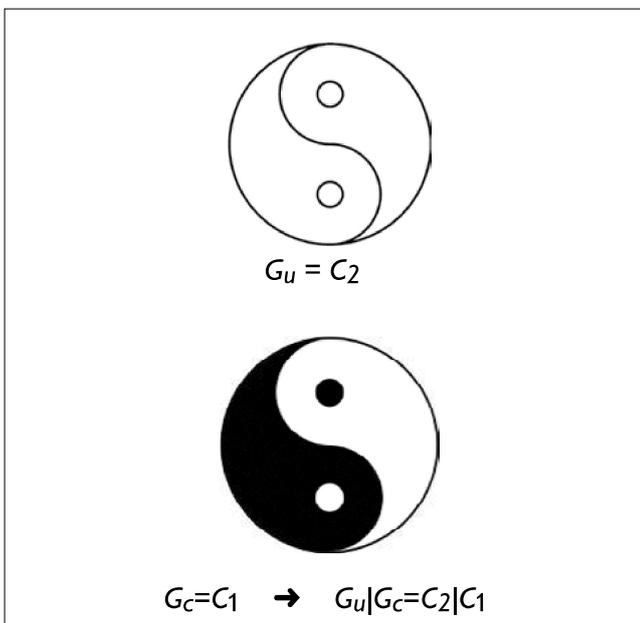


Figura 3: Exemplificação do processo de classificação do grupo de antissimetria a partir do símbolo yin-yang; em cima, figura sem coloração; em baixo, figura com coloração.



▲ Figura 4: Fachadas portuguesas no Porto, em Guimarães e em Gaia, com o mesmo padrão de azulejos de Truchet, do tipo  $cmm|cm$ .

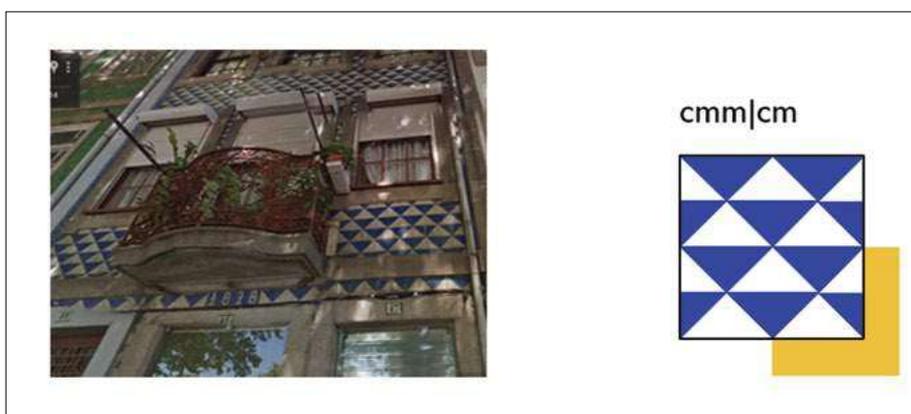


Figura 5: Fachada no Porto com azulejos de Truchet e padrão  $cmm|cm$ .



Figura 6: Fachada no Porto com azulejos de Truchet e padrão  $p4m|p4g$ .

Na figura 4 podemos ver várias fachadas com azulejos de Truchet colocados todos na mesma posição. O padrão assim formado classifica-se como tendo grupo de antissimetria  $cmm|cm$ .

Nas figuras 5 a 8 podemos ver fachadas com azulejos de Truchet cuja região fundamental é composta por quatro azulejos em diversas posições.

As casas das figuras 4 a 7 datam muito provavelmente da primeira metade do século XX. Na figura 8 podemos ver uma habitação posterior, da segunda metade do século XX.

A figura 9 apresenta uma fachada com azulejos de Truchet cuja região fundamental é composta por 16 azulejos.



Figura 7: Fachada em Cabeceiras de Basto com azulejos de Truchet e padrão  $p4m|p4m$ .

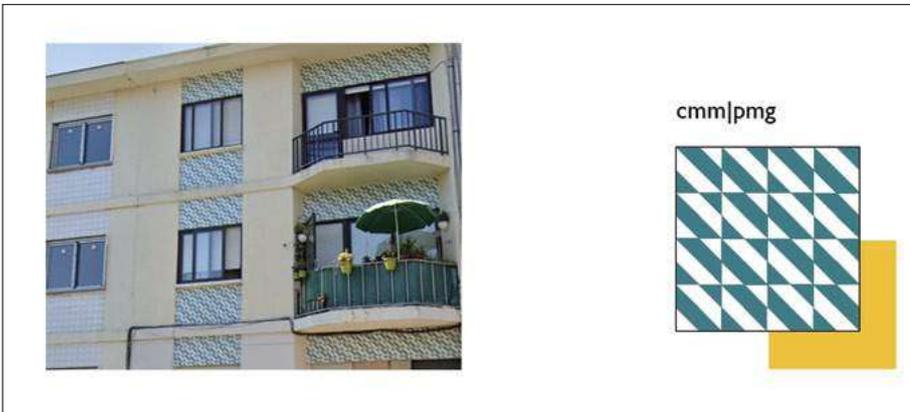


Figura 8: Fachada no Porto com azulejos de Truchet e padrão  $cmm|pmg$ .

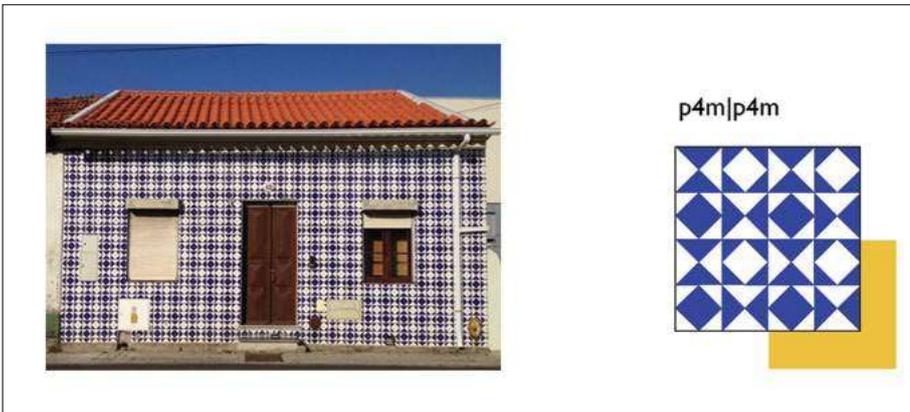


Figura 9: Fachada perto de Aveiro com azulejos de Truchet e padrão  $p4m|p4m$ .

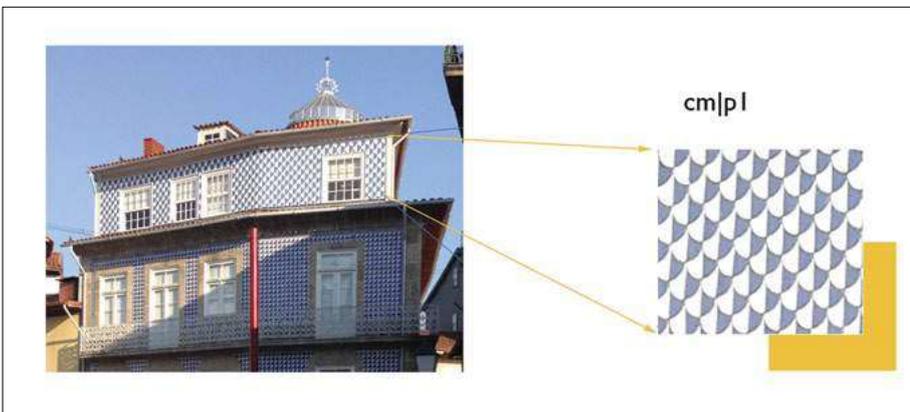


Figura 10: Fachada em Guimarães com padrão  $cm|p1$  no topo do edifício.



Figura 11: Barra de azulejos no Palácio de São Marcos, perto de Coimbra, padrão  $cmm|pmm$ .



Figura 12: Edifício no Porto com padrão  $cm|pm$ .

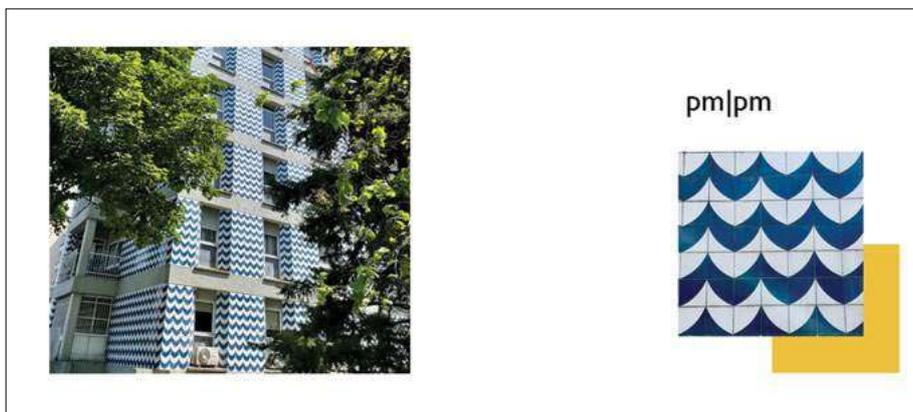


Figura 13: Edifício no Porto com padrão  $pm|pm$ .

Nas fachadas de edifícios revestidos com azulejos quadrados, o grupo de simetria que se encontra com maior frequência é o grupo  $p4m$ , possivelmente por apresentar muitas simetrias. Não é por isso de estranhar que o grupo de antissimetria  $p4m|p4m$  tenha surgido em diferentes padrões, como se pode verificar nas figuras apresentadas ao longo deste trabalho. Note-se, no entanto, que o padrão da figura 4, de tipo  $cmm|cm$ , é o mais frequente, muito provavelmente pelo facto de envolver

o azulejo sempre na mesma posição, o que facilita a sua construção do ponto de vista prático.

Destacamos, ainda assim, a variedade de grupos de antissimetria encontrados: ao todo, temos dez grupos distintos.

As figuras 10 a 16 mostram fotos de fachadas com azulejos sem ser de Truchet que também exibem padrões antissimétricos. Novamente os registos provêm de várias localidades portuguesas.



Figura 14: Fachada em Aveiro com padrão p2|p2.

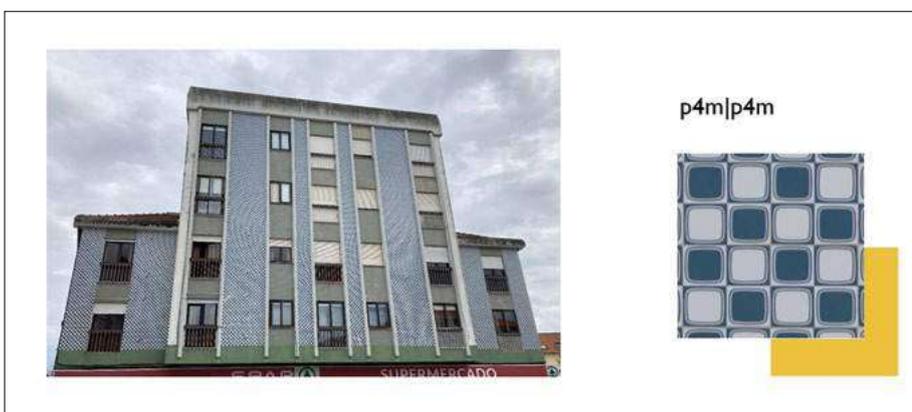


Figura 15: Fachada em Aveiro com padrão p4m|p4m.



Figura 16: Fachada em Aveiro com padrão pmm|pmm.

### UMA FERRAMENTA DIDÁTICA PARA EXPLORAR A SIMETRIA E A ANTISSIMETRIA:

Tanto a simetria como a antissimetria têm sido utilizadas pelos seres humanos não só nas fachadas de azulejos mas também noutros elementos decorativos e em obras de arte. Entrelaçar a matemática com a arte na sala de aula pode ser uma maneira bem-sucedida de promover o interesse pela matemática como mostram, por exemplo, os trabalhos Hall & Pais (2021, 2018), Hall & Teixeira (2018).

O conceito de antissimetria pode ser utilizado no ensino para ajudar a consolidar o conceito de simetria. Nunes et al. (2022) apresentam alguns exemplos didáticos neste sentido. Mais recentemente, os autores do presente trabalho desenvolveram uma aplicação no site *Wolfram Demonstrations Project*, intitulada “*Symmetries and Antisymmetries of Truchet Rosettes*” (Hall et al., 2023) que permite aos utili-

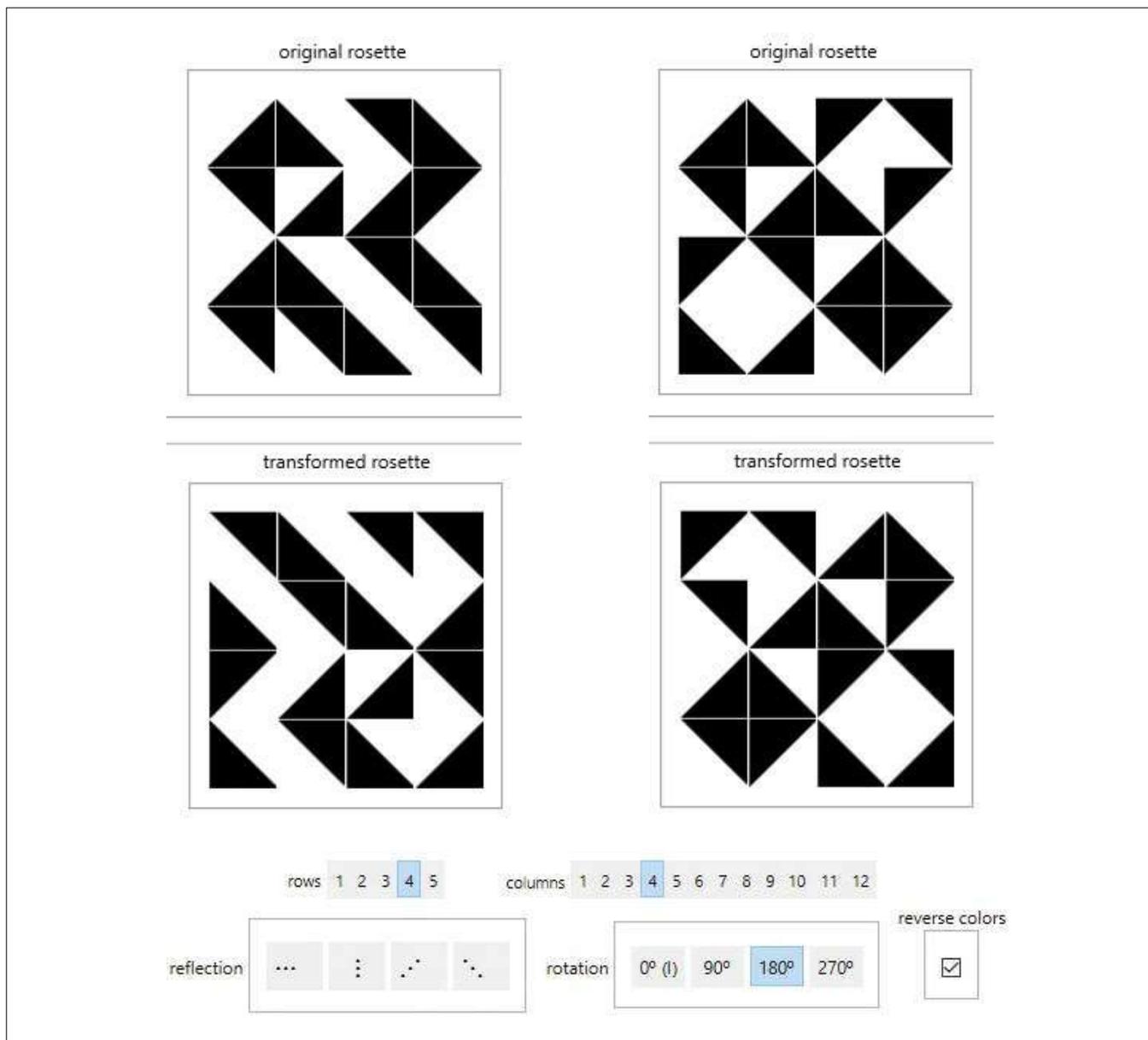


Figura 17: Exemplos de rosáceas criadas com a aplicação de Hall et al. (2023). À esquerda, rosácea rodada  $180^\circ$  com troca de cores; à direita, rosácea refletida sobre um eixo vertical. Em baixo, os botões de opção usados para a rosácea da esquerda.

zadores explorarem os conceitos de simetria e antissimetria de forma interativa. É pedido ao utilizador que crie livremente uma rosácea retangular com azulejos de Truchet e paralelamente são disponibilizadas várias transformações geométricas (isometrias e troca de cores) que permitem analisar as simetrias e as antissimetrias da rosácea. Terminamos este artigo apresentando algumas imagens de rosáceas produzidas com essa aplicação (figura 17).

### Agradecimentos

Este trabalho foi financiado pela FCT - Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito dos projetos UIDB/04106/2020 e UIDP/04106/2020 do Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA).

## REFERÊNCIAS

- [1] Atractor (2018) “A Matemática dos Azulejos”, *Gazeta de Matemática*, 186, 3-9. <https://gazeta.spm.pt/fichaartigo?id=1484>
- [2] Grunbaum, B. & Shephard, G. C. (1987) *Tilings and Patterns*, Freeman and Company.
- [3] Hall, A., Almeida, P., & Teixeira, R. (2019) “Exploring Symmetry in Rosettes of Truchet Tiles”, *Journal of Mathematics and the Arts*, 13(4), 308-335. <https://doi.org/10.1080/17513472.2019.1581963>
- [4] Hall, A., Pereira, A., Nunes, J., e Vettori, P. (2023) “Symmetries and Antisymmetries of Truchet Rosettes”, *Wolfram Demonstrations Project*, <http://demonstrations.wolfram.com/SymmetriesAndAntisymmetriesOfTruchetRosettes>
- [5] Hall, A., & Pais, S. (2021) “Using an Interdisciplinary Approach to the Teaching of Solid Geometry in a Professional Development Course for Preschool and Primary School Teachers”, *Indagatio Didactica*, 13(3), 449-471. <https://doi.org/10.34624/id.v13i3.25584>
- [6] Hall, A., & Pais, S. (2018) “Learning and Teaching Symmetry by Creating Ceramic Panels with Escher Type Tessellations”, *Indagatio Didactica*, 10(2), 85-107. <https://doi.org/10.34624/id.v10i2.11311>
- [7] Hall, A., & Teixeira, R. (2018). “Interlacing Mathematics and Culture: Symmetry in Traditional Pavements and Crafts”. *Journal of Mathematics and Culture*, 12(1), 28-46.
- [8] Martin, G. (1982) *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag.
- [9] Nunes, J., Hall, A., & Vettori, P. (2022) “Antisymmetry in Portuguese Ceramic Tile”. Em Viana, V., Nagy, D., Xavier, J., Neiva, A., Ginoulhiac, M., Mateus, L. & Varela, P. (Eds.), “Symmetry: Art and Science”, *Journal of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry*, 12th SIS-Symmetry Congress [Special Issue], 34-39. <https://doi.org/10.24840/1447-607X/2022/12-03-034>
- [10] Radovic, L., and Jablan, S. (2001) “Antisymmetry and Modularity in Ornamental Art”. *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science, Conference Proceedings*, 55-66.
- [11] Veloso, E. (2012) “Simetria e Transformações Geométricas”. *Textos de Geometria para Professores*. APM.
- [12] Wade, D. (2006) *Symmetry: The Ordering Principle*. Wooden Books.
- [13] Washburn, D., & Crowe, D. (1988) *Symmetries of Culture Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*. University of Washington Press.
- [14] Westphal-Fitch, G., Huber, L., Gomez, J. C., & Fitch, W. T. (2012) “Production and Perception Rules Underlying Visual Patterns: Effects of Symmetry and Hierarchy”. *Phil. Trans. R. Soc. B*, 367, 2007-2022. <https://doi.org/10.1098/rstb.2012.0098>

### SOBRE OS AUTORES

**Andreia Hall**, Doutorada em Probabilidade e Estatística, é Professora Associada no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro desde 2005. Tem interesse em Educação Matemática, Matemática e Arte, e Análise Estatística de Dados.

**João Nunes**, licenciado em Matemática (1992) e duas vezes Mestre em Matemática (2009 e 2020), é professor do ensino secundário desde 1992. Atualmente é aluno do programa doutoral em Matemática (ramo Educação) da Universidade de Aveiro. Está interessado em Geometria, Álgebra, Arte e suas aplicações na Educação Matemática.

**António Pereira**, Doutorado em Matemática, é Professor Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro desde 2007. Tem interesse em Teoria da Computação, Algoritmos e Computação Quântica.

**Paolo Vettori**, Doutorado em Teoria dos Sistemas Matemáticos, é Professor Auxiliar no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro desde 2008. A sua atividade de investigação centra-se principalmente nas aplicações da Álgebra Linear à Teoria do Controlo e à Teoria de Códigos.