



CAOS EM MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS SIR SAZONALMENTE FORÇADOS

ALEXANDRE RODRIGUES

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO DA UNIV. DE LISBOA E CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIV. DO PORTO

alexandre.rodrigues@fc.up.pt

Tendo como mote o trabalho [4], este texto descreve o modelo epidemiológico SIR (modificado) com a particularidade de que o parâmetro que modela a *taxa de infecção* apresenta variações sazonais. Descreve-se, de uma forma acessível, a dinâmica do modelo e enuncia-se que, sob certas condições, o fluxo associado pode exibir caos. A existência de caos nestes modelos tem consequências ligadas à impossibilidade de efetuar previsões precisas do número de infetados pela doença (ao longo do tempo). Os resultados analíticos obtidos são consistentes com a crença empírica de que sazonalidade intensa em modelos epidemiológicos induz maior erro nas previsões. No decorrer da exposição, explicitar-se-á a ideia geométrica da prova da existência de caos na dinâmica do modelo.

1. INTRODUÇÃO

A emergência de modelos matemáticos associados à epidemiologia trouxe uma importante contribuição para o combate a uma vasta gama de doenças como a SIDA, a tuberculose, a hepatite e, mais recentemente, a COVID-19 [5]. Vários modelos têm sido generalizados de diversas formas para decidir sobre medidas preventivas para conter a proliferação de doenças infecciosas.

O modelo SIR [8] é um dos modelos compartimentais mais simples e muitas equações diferenciais em contexto epidémico advêm desta forma básica. Assenta na divisão da população em três grupos de indivíduos (compartimentos): *Suscetíveis* (S), *Infetados* (I) e *Recuperados* (R), sendo razoavelmente preditivo no âmbito de doenças infecciosas transmitidas de humano para humano e em que a recuperação confere resistência como o sarampo, a parotidite e a rubéola [11]. Sob condições genéricas, sabe-se que o fluxo associado ao modelo SIR clássico possui um atrator global [7].

Embora o impacto da sazonalidade para modelar a evolução de algumas doenças específicas possa ser ne-

gligenciado, noutros casos esse impacto é extremamente importante e deve ser tido em conta no modelo. O estado atual da pesquisa indica evidências empíricas da presença das forças sazonais em modelos epidemiológicos, incluindo factores que influenciam a dinâmica da transmissão da doença ao longo do tempo, como o horário escolar ou de trabalho das populações sobre as quais recai o estudo, mudanças climáticas e ambientais, decisões políticas, entre outros [3]. A gripe sazonal é um exemplo paradigmático em que a sazonalidade desempenha um papel crucial na dinâmica pois há períodos do ano em que a incidência dessa gripe tem maior prevalência¹.

Em modelos matemáticos que incluem sazonalidade, os parâmetros são geralmente modulados através de funções periódicas [6, 7], que, naturalmente, adicionam maior complexidade aos modelos clássicos.

1.1. Estado da Arte em Modelos Periodicamente Perturbados

Em 2001, os autores de [7] analisaram um modelo SIR sazonalmente forçado direcionado para a evolução do sarampo e da rubéola e concluíram que a dinâmica das doenças em populações submetidas à sazonalidade é mais complexa. Em [2, 6] estuda-se a dinâmica de vários tipos de modelos aplicados à epidemiologia em que a taxa de transmissão de doenças é modulada através de uma função periódica. Em 2017, os autores de [1] procuraram compreender as consequências da sazonalidade em modelos epidemiológicos e mostraram, analiticamente, a existência de caos (ferraduras) sob a existência de sazonalidade na transmissão da doença, baixas taxas de natalidade e mortalidade, e elevadas taxas de recuperação.

1.2. Número Básico de Reprodução

O *número básico de reprodução*, denotado por \mathcal{R}_0 , pode ser visto como um parâmetro destinado a quantificar a propagação da doença, estimando o *número médio* de infeções secundárias numa população completamente suscetível. A constante \mathcal{R}_0 tem sido amplamente utilizada como uma medida para estimar a eficácia das medidas de controlo sanitário e para conduzir a política de gestão de doenças. Estatisticamente, admitindo que os parâmetros do modelo são constantes, se $\mathcal{R}_0 < 1$ então a propagação da doença diminui e é eliminada, enquanto que se $\mathcal{R}_0 > 1$ então

¹ Sugere-se a consulta da figura 10 de https://www.insa.min-saude.pt/wp-content/uploads/2022/05/IS20_2022.pdf para análise dos períodos com maior incidência de gripe sazonal (Fonte: Direção, Geral ds Saúde).

a doença persiste [9]. No entanto, em modelos em que os parâmetros são variáveis, este juízo pode falhar: doenças podem persistir com $\mathcal{R}_0 < 1$, como veremos ao longo do presente texto.

O artigo [4] é uma investigação preliminar da interação entre sazonalidade, dinâmica determinística e persistência de caos, fornecendo uma compreensão matemática da dinâmica de certos modelos epidemiológicos. Em [4] exibe-se explicitamente um sistema dinâmico multiparamétrico inspirado no modelo SIR com $\mathcal{R}_0 < 1$ para o qual a componente I não tende para 0. Prova-se analiticamente que, sob perturbações periódicas com alta frequência na taxa de infecção (\Leftrightarrow alta sazonalidade), caos aparece persistentemente no seu fluxo. Embora o modelo em análise apresente limitações biológicas, a prova da persistência da dinâmica caótica é relevante porque se preconiza alguma precaução em previsões epidemiológicas na presença de sazonalidade.

Não é objetivo do autor uma descrição exaustiva do modelo nem a apresentação de definições técnicas. Assume-se que o leitor possui conhecimentos básicos de equações diferenciais ordinárias. Para o leitor interessado nos detalhes e provas, sugere-se a leitura de [4, 7], salientando-se a exposição primorosa da segunda referência. A definição de caos que será usada ao longo do texto é a de *atrator estranho* de [12, §2.3]: *o fluxo apresenta um conjunto invariante, fechado e limitado onde quase todas as órbitas apresentam uma direção expansiva*.

2. DINÂMICA DO MODELO SIR MODIFICADO

Nesta secção, apresenta-se o modelo em consideração e os principais resultados.

2.1. Modelo

O modelo SIR clássico assume a divisão da população (humana) em três classes de indivíduos [8] face a uma doença infecciosa:

▶ *Suscetíveis (S)*: indivíduos que atualmente não estão infetados mas que podem contrair a doença;

▶ *Infetados (I)*: indivíduos que estão atualmente infetados e que podem transmitir ativamente a doença a um indivíduo suscetível, até à sua recuperação;

▶ *Recuperados (R)*: indivíduos que atualmente não podem ser infetados nem podem infetar indivíduos suscetíveis. Inclui indivíduos que têm imunidade definitiva porque recuperaram de uma infeção recente.

As letras S , I e R denotam o número de indivíduos de cada classe. Assume-se que os indivíduos suscetíveis nunca estiveram em contacto com a doença e que ficam imunes à doença quando recuperam. Inspirado em [8], o sistema não linear de equações diferenciais ordinárias (ODE) nas variáveis S , I e R que se vai considerar (dependendo da variável tempo t) é dado pela seguinte família no parâmetro γ :

$$\begin{cases} \dot{S} = S(A - S) - \beta_\gamma(t)IS \\ \dot{I} = \beta_\gamma(t)IS - (\mu + d)I - \frac{rI}{a + I} \\ \dot{R} = \frac{rI}{a + I} - \mu R, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde

$$X(t) = (S(t), I(t), R(t)) \in (\mathbb{R}_0^+)^3,$$

$$\dot{X} = (\dot{S}, \dot{I}, \dot{R}) = \left(\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}, \frac{dR}{dt} \right),$$

$$\beta_\gamma(t) = \beta_0 (1 + \gamma\Phi(\omega t)).$$

O parâmetro γ controla a deformação do gráfico β_γ relativamente à função constante igual a β_0 . A figura 1 ilustra a interação entre as classes de indivíduos suscetíveis, infetados e recuperados no modelo (2.1).

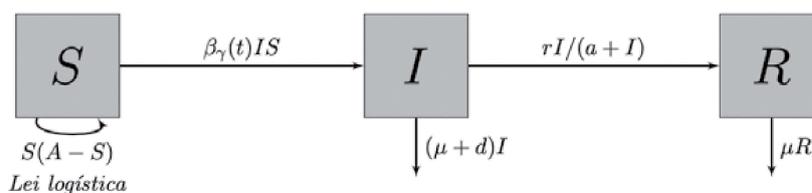


Figura 1. Diagrama esquemático do modelo (2.1). As caixas representam compartimentos e as setas indicam o fluxo entre os compartimentos.

2.2. Interpretação dos Parâmetros

Os parâmetros de (2.1) são calculados estatisticamente e podem ser interpretados da seguinte forma:

A : Limite de capacidade de Suscetíveis na ausência de doença;

γ : Amplitude da variação sazonal que oscila entre $\beta_0 \left(1 + \gamma \min_{t \in [0, T]} \Phi(t)\right) > 0$ (época baixa) e $\beta_0 \left(1 + \gamma \max_{t \in [0, T]} \Phi(t)\right)$ (época alta), para algum $T > 0$ – ver figura 2;

β_0 : Média da taxa de transmissão da doença na ausência de sazonalidade²;

$\Phi(\omega t)$: Efeitos da sazonalidade periódica ao longo do tempo com frequência $\omega > 0$;

μ : Taxa de mortalidade natural de infetados e recuperados;

d : Taxa de mortalidade de indivíduos infetados pela doença;

r : Taxa de cura;

a : "Mede" os efeitos de um atraso na resposta ao tratamento que é proporcional à saturação dos serviços de saúde.

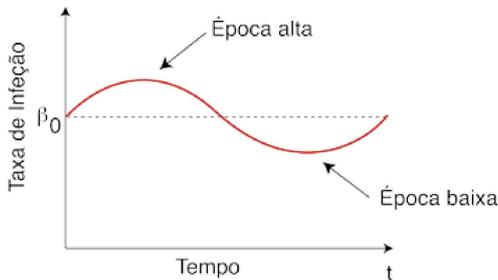


Figura 2. Representação gráfica da taxa de infecção $\beta_\gamma(t)$ com $\gamma > 0$ (a vermelho).

2.3. Motivação

O sistema (2.1) foi inspirado no modelo SIR clássico [8], com as seguintes adaptações:

(1) Na classe dos *Suscetíveis* considera-se o crescimento logístico $S(A - S)$ [10] ao invés de crescimento linear ou exponencial;

(2) A taxa de transmissão da doença é dada por uma função periódica não autónoma capaz de capturar

variações sazonais [7] em vez da função constante (modelo clássico);

(3) A transição de *Infetado* para *Recuperado* é dada pela função $\frac{rI}{a+I}$, contemplando a limitação das condições clínicas que não crescem linearmente com o número de infetados [14]. O termo consagra ainda os efeitos de atrasos na resposta ao tratamento.

2.4. Hipóteses

Daqui em diante vai-se admitir as condições que se seguem, habituais em contextos epidemiológicos periodicamente forçados:

(1) Os parâmetros de (2.1) são não negativos;

(2) Para todo o $t \in \mathbb{R}_0^+$, tem-se que $S(t) \leq A$;

(3) Para $T > 0$ e $\gamma \geq 0$, a função $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 , T -periódica, e tem (pelo menos) dois pontos críticos não degenerados.

O espaço de fase associado a (2.1) é um subconjunto de $(\mathbb{R}_0^+)^3$, munido da métrica euclidiana, e o conjunto de parâmetros é dado por:

$$\Lambda = \left\{ (A, r, \beta_0, a, \mu, d) \in (\mathbb{R}_0^+)^6 \right\}, \gamma \in [0, \varepsilon] \text{ and } \omega \in \mathbb{R}^+,$$

onde $\varepsilon > 0$ é arbitrariamente pequeno. As duas primeiras equações de (2.1), \dot{S} e \dot{I} , são independentes de R , razão pela qual se pode reduzir (2.1) a:

$$\dot{x} = f_\gamma(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{S} = S(A - S) - \beta_\gamma(t)IS \\ \dot{I} = \beta_\gamma(t)IS - (\mu + d)I - \frac{rI}{a + I} \end{cases} \quad (2.2)$$

com $x = (S, I)$. Denote-se por $f_0(x)$ o campo de vetores associado a (2.2) que está bem definido em $(\mathbb{R}_0^+)^2$.

2.5. Resultados

Tal como já foi referido na secção 1.2, o escalar \mathcal{R}_0 pode ser visto como o número médio de contactos geradores de infecção de um único indivíduo durante todo o período em que permanece infectado. De acordo com [1, 9], para o modelo (2.1), esse número pode ser calculado explicitamente do seguinte modo:

² Em §2.4 serão enunciadas as propriedades analíticas sobre esta função.

$$\mathcal{R}_0 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{A\beta(t)}{\mu + \frac{r}{a}} dt = \frac{\beta_0 A}{\mu + \frac{r}{a}} \geq 0. \quad (2.3)$$

O resultado principal de [4] enuncia que existem parâmetros em Λ tais que, se ω for suficientemente grande, então é "probabilisticamente fácil" encontrar campos de vetores da família f_γ cuja dinâmica exibe caos e onde é difícil efetuar previsões rigorosas acerca da evolução do número de infetados. Este fenómeno pode ter consequências a nível pandémico. Mais formalmente, tem-se:

Teorema A. [4] *Existe um conjunto aberto e não vazio de Λ , e $\omega^* > 0$, para os quais o modelo (2.2) apresenta $\mathcal{R}_0 < 1$ e tal que, se $\omega > \omega^*$, então a seguinte desigualdade é válida:*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|\{\gamma \in [0, \varepsilon] : f_\gamma \text{ exibe caos}\}|}{\varepsilon} > 0, \quad (2.4)$$

onde $|\cdot|$ denota o comprimento usual.

As implicações dinâmicas do teorema A são naturalmente induzidas para o sistema (2.1). O resultado é consistente com a crença empírica de que a sazonalidade intensa induz caos [1, 6, 7].

3 IDEIA GEOMÉTRICA DA PROVA E IMPLICAÇÕES BIOLÓGICAS

Nesta secção descreve-se a ideia geométrica da prova e as implicações epidemiológicas do Teorema A.

3.1. Considerações acerca da Prova

A demonstração do teorema A em [4] assenta nas seguintes ideias:

▶ Para $\gamma = 0$, existe um conjunto aberto e não vazio de Λ para o qual $\mathcal{R}_0 < 1$ e o sistema (2.2) exibem uma solução periódica atratora, como sugerido pela figura 3;

▶ Para $\gamma > 0$ e $\omega \approx 0$, o sistema não autónomo (2.2) é equivalente a um sistema autónomo tridimensional exibindo um toro bidimensional invariante e atrator;

▶ À medida que ω vai crescendo, o toro vai sendo destruído e, para ω suficientemente grande, emergem atratores caóticos observáveis numericamente ("rank-one attractors" na terminologia de [13]).

O método para encontrar atratores estranhos não pode ser usado diretamente no modelo SIR clássico [8]; é necessário incluir o crescimento logístico em (2.1) para definir um

conjunto aberto de parâmetros no qual ocorre uma bifurcação de Hopf. Produzindo um toro invariante no sistema autónomo associado, a teoria associada à "Quebra de toro" [12] pode ser aplicada e a abundância de atratores estranhos segue por [13]. A prova do teorema A é válida para outros

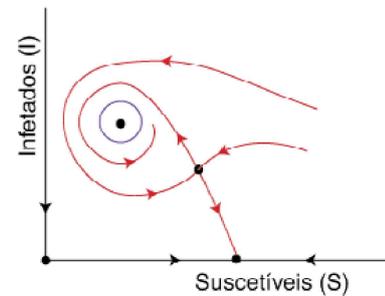


Figura 3. Esquema do diagrama de fase da equação (2.2). Os pontos representam equilíbrios. A curva fechada a azul denota uma solução periódica atratora.

modelos com perturbações periódicas cujo fluxo exiba uma solução periódica atratora.

3.2. Implicações Biológicas

Em [4] procura-se entender as consequências da sazonalidade em modelos epidemiológicos simples. Analisa-se um sistema dinâmico periodicamente forçado inspirado no modelo SIR através da adição de um termo não autónomo da forma

$$\beta_\gamma(t) = \beta_0 (1 + \gamma\Phi(\omega t)).$$

O modelo de [4] contempla a capacidade-limite da população [14] e uma taxa de tratamento saturada [9]. O termo Φ em $\beta_\gamma(t)$ pode ser visto como uma função periódica com dois extremos globais (governando as estações definidas pelas condições meteorológicas). O parâmetro ω pode ser interpretado como uma sazonalidade extra em relação à função Φ original. Este parâmetro $\omega > 0$ pode ser determinado por motivos políticos, férias escolares e/ou confinamentos forçados.

Finaliza-se esta secção com uma breve consideração sobre o número \mathcal{R}_0 usado em modelos epidemiológicos. O modelo estudado em [4] apresenta caos e $\mathcal{R}_0 < 1$, evidenciando que o número de infetados pode não estar controlado com $\mathcal{R}_0 < 1$. A definição de \mathcal{R}_0 não é uma grandeza universal que se aplique a todas as configurações [9].

Se o escalar \mathcal{R}_0 for usado em trabalhos de investigação, ele deve ser acompanhado das premissas subjacentes ao modelo e da evidência de que ele é realmente um critério de controlo. Este facto deve servir de alerta para todos os

que fazem cálculos numéricos e que deduzem que a doença infecciosa desaparece meramente porque $\mathcal{R}_0 < 1$.

4. PROBLEMA EM ABERTO: A VACINAÇÃO

A existência de caos (atratores estranhos) em modelos epidemiológicos pode ser vista como um fenómeno indesejável associado à imprevisibilidade. Neste sentido, o problema de converter caos em dinâmica regular torna-se particularmente relevante. No contexto do sistema (2.1), evitar dinâmicas caóticas pode ser operacionalizado pela introdução de uma perturbação periódica que modela uma estratégia de *vacinação sazonal*, $v(t)$. Simulações numéricas mostram que uma diferença de fase entre as duas funções periódicas (taxa de infeção $\beta(t)$ e taxa de vacinação $v(t)$) podem desempenhar um papel importante no controlo do caos. Tal controlo pode contribuir para otimizar a política de vacinação, garantindo que a proporção de indivíduos *Suscetíveis* permanece abaixo de um determinado limiar.

Em [4], conjectura-se que se a frequência de $v(t)$ for suficientemente próxima da frequência de $\beta_\gamma(t)$ e separada por uma constante de fase, então a emergência de caos não é possível, estabilizando assim a dinâmica do sistema. A prova dessa conjectura é um trabalho em curso no trabalho de doutoramento de J. Carvalho (Universidade do Porto).

O autor contou com o apoio do CMUP, Portugal (UIBD/MAT/00144/2020), que é financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) com fundos estruturais nacionais e europeus através dos programas FEDER, no âmbito do PT2020. Também teve apoio do projeto CEECIND/01075/2020 do Estímulo do Emprego Científico (Apoio Individual) financiado pela FCT.

REFERÊNCIAS

[1] P. G. Barrientos, J. A. Rodríguez, A. Ruiz-Herrera, "Chaotic Dynamics in the Seasonally Forced Sir Epidemic Model", *J. Math. Biol.*, 75, 1655-1668, 2017.

[2] S. Bilal, B. K. Singh, A. Prasad, E. Michael, "Effects of Quasiperiodic Forcing in Epidemic Models", *Chaos*, 26 (8), 2016.

[3] B. Buonomo, N. Chitnis, A. d'Onofrio, "Seasonality in Epidemic Models: a Literature Review", *Ric. Di Mat.*, 67, 7-25, 2018.

[4] J. P. Carvalho, A. A. Rodrigues, "Strange Attractors in

a Dynamical System Inspired by a Seasonally Forced Sir Model", *Physica D*, 434, 133268, 2022.

[5] S. Cobey, "Modeling Infectious Disease Dynamics", *Science*, 368, 713-714, 2020.

[6] J. Duarte, C. Januário, N. Martins, S. Rogovchenko, Y. Rogovchenko, "Chaos Analysis and Explicit Series Solutions to the Seasonally Forced Sir Epidemic Model", *J. Math. Biol.*, 78, 2235-2258, 2019.

[7] M. J. Keeling, P. Rohani, B. T. Grenfell, "Seasonally Forced Disease Dynamics Explored as Switching Between Attractors", *Physica D*, 148, 317-335, 2001.

[8] W. O. Kermack, A. G. McKendrick, "Contributions to the Mathematical Theory of Epidemics", *Proc. R. Soc. A*, 115, 700-721, 1927.

[9] J. Li, D. Blakeley, R. J. Smith, "The Failure of R_0 ", *Comput. Math. Methods Med.*, 2011(17), 2011.

[10] J. Li, Z. Teng, G. Wang, L. Zhang, C. Hu, "Stability and Bifurcation Analysis of an Sir Epidemic Model with Logistic Growth and Saturated Treatment" *Chaos Solitons Fractals*, 99, 63-71, 2017.

[11] S. W. Park, B. M. Bolker, "A Note on Observation Processes in Epidemic Models", *Bull. Math. Biol.*, 82, 2020.

[12] A. A. Rodrigues, " 'Large' Strange Attractors in the Unfolding of a Heteroclinic Attractor", *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 42, 2355-2379, 2022.

[13] Q. Wang, L.S. Young, "From Invariant Curves to Strange Attractors", *Commun. Math. Phys.*, 225-275, 2002.

[14] X. Zhang, X. Liu, "Backward Bifurcation of an Epidemic Model with Saturated Treatment Function", *J. Math. Anal.*, 348, 433-443, 2008.

SOBRE O AUTOR

Alexandre Rodrigues é professor auxiliar em Análise Matemática e Matemática Financeira no Instituto Superior de Economia e Gestão da Universidade de Lisboa. É membro integrado no Centro de Matemática da Universidade do Porto. Faz investigação em Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais, com especial ênfase na dinâmica de redes heteroclínicas.