Livros contados

Matemática Discreta: Tópicos de Combinatória,

de J. M. S. Simões Pereira (Editora Luz da Vida [www.luz-da-vida.com.pt], 2006)
recensão crítica por Paulo Ventura Araújo, Universidade do Porto

O que é a matemática discreta? Como reconhecê-la? Em que áreas se divide? Por que é que está na moda? Perguntas ingénuas estas, pressupondo que a matemática é uma sala com armários estanques, cada um deles com gavetas cuidadosamente etiquetadas. No armário da álgebra, cautelosamente arredado do da análise, temos a gaveta da teoria dos grupos, a da teoria dos anéis, outra da teoria dos corpos, etc.; não há contágio possível entre armários, e muito pouco entre gavetas do mesmo armário. As coisas não são bem assim, mas a divisão do ensino em disciplinas, e a necessidade humana de tudo classificar, dão alguma verdade a esta caricatura. A matemática discreta, alimentando-se do finito, preferindo a contagem exaustiva à passagem ao limite, dá-se mal com a análise, que vive do *contínuo* onde todos os objectos se fundem; mas tolera e até namora a álgebra, embora, terra-a-terra como é, lhe critique alguns exageros abstraccionistas. A teoria dos números, a combinatória e a teoria dos grafos são as grandes componentes da matemática discreta: a primeira, nascida com o acto de contar, é tão remota como a civilização, e já na antiga Grécia, com Euclides e Diofanto, atingiu alto grau de apuramento; a segunda, de génese menos ilustre, está ligada ao estudo das probabilidades em jogos de sorte, iniciado no século XVII por Pascal e Jakob Bernoulli; e a terceira surgiu em 1736 com a publicação do artigo de Euler sobre as pontes de Königsberg. A reconhecível afinidade entre as três áreas, que nos leva a reuni-las sob o chapéu da matemática discreta, não ilude o contraste entre os pergaminhos ancestrais da *rainha da matemática* e o carácter arrivista das outras duas.

Gozando a teoria dos números de tradicional autonomia, são a combinatória e a teoria dos grafos que compõem a ementa dos cursos universitários de matemática discreta. Só ao longo do século XX estas duas disciplinas se desenvolveram significativamente; e só em anos recentes se assistiu à generalização do seu ensino nas universidades. Até há poucos anos, o único contacto dum estudante de licenciatura com a combinatória acontecia nos cursos de probabilidades e estatística, que costumam incluir umas pitadas de cálculo combinatório – mas sem demonstrações, talvez para sublinhar a vocação aplicada desses cursos. Quanto à teoria dos grafos, a regra era a omissão pura e simples. Obras de referência como [2] e [3] não mencionam estes dois assuntos, ou fazem-no só tangencialmente.

Hoje a onda discreta é imparável: em Portugal, com a reformatação bolonhesa das licenciaturas em Matemática, praticamente todas passarão a ter uma disciplina dessa área, obrigatória na maioria dos casos. O impulso vem da nossa sociedade informatizada: a matemática que se exprime em números de contar é a mesma que faz funcionar os computadores. Nem todos os assuntos da matemática discreta são hoje aplicáveis, poucas serão as aplicações aprofundadas em aula, e só uma percentagem mínima dos alunos alguma vez trabalhará seriamente com elas; mas a aplicabilidade e a actualidade do assunto constituem chamariz irresistível.

O livro de que aqui falamos, da autoria de Simões Pereira, professor catedrático na Universidade de Coimbra, insere-se pois numa tendência bem actual. Cingindo-se à combinatória, trata de uma grande variedade de assuntos, com aplicações genuínas que evitam o estilo noticioso de textos mais ligeiros. É instrutivo confrontar este livro com [4]: as tábuas das matérias são quase sobreponíveis, o que sugere a emergência de um cânone no assunto; mas, no que os dois livros têm de comum, o português vai incomparavelmente mais longe. A abundância de indicações bibliográficas no livro de Simões Pereira faz dele precioso guia para estudos mais avançados, ao passo que o de Martin, não tendo sequer bibliografia, se fecha sobre si próprio. O livro de Simões Pereira contém um índice remissivo completo, 186 exercícios (todos resolvidos ou com indicações de resolução) e muitos exemplos. Recheada de digressões, a escrita é coloquial mas precisa, revelando um autor culto, informado sobre matemática e atento ao mundo.

A introdução ao livro explica a dicotomia matemática do contínuo / matemática discreta, e dá razões para a notoriedade recente desta última. Mas o primeiro tema matemático abordado é um clássico recreativo: quadrados mágicos e suas variações (como o Sudoku). Ainda no capítulo I, considera-se depois a pergunta: se tivermos um algoritmo ou uma fórmula explícita para obter os valores de uma função, podemos de facto calculá-los? A resposta depende da capacidade do computador e do tempo disponível para o cálculo, mas é um *não* inapelável quando a função não é primitiva recursiva; exemplo de tal enormidade é a função de Ackerman, definida por múltiplas iterações da exponenciação entre inteiros. Imitando a escalada vertiginosa desta função, no final do capítulo há uma subida abrupta do grau de dificuldade do texto; mas a questão da recorrência, aqui tratada a nível tão sofisticado, regressa nos capítulos posteriores em roupagens elementares.

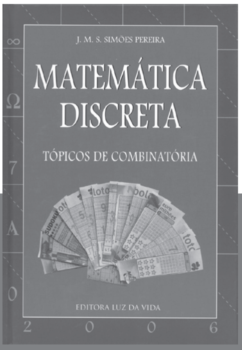
De conteúdo mais ortodoxo, o capítulo II trata das bases do cálculo combinatório: permutações, arranjos e combinações. A função geradora de uma sucessão – definida como a série de potências cujos coeficientes são os termos da sucessão – é a grande ferramenta introduzida neste capítulo, e será amiúde retomada no livro: por exemplo no capítulo VII, para descrever a solução geral de uma recorrência linear com coeficientes constantes, classe que inclui a sucessão de Fibonacci. A ideia é que, para certas sucessões obedecendo a relações de recorrência ou dadas por contagens de famílias de objectos, é possível somar os termos da função geradora e daí obter uma fórmula explícita para o termo geral da sucessão. A propósito surge a pergunta: que funções podem ser expressas por fórmulas? Mas o primeiro requisito para a resposta – o de sabermos o que é exactamente uma fórmula – é meta que o autor considera inatingível.

O capítulo III ocupa-se de um tema com aplicações de respeito: a medição do poder. O modelo de Shapley-Shubik distingue os membros de um orgão deliberativo contando as situações possíveis em que cada um deles tem o voto decisivo: assim, no Conselho de Segurança da ONU, o poder de cada membro permanente é 105 vezes o de um membro não permanente. Ainda no capítulo III fala-se de partilhas: tanto no caso de bens divisíveis como indivisíveis, há métodos que permitem que cada herdeiro guarde para si, no mínimo, uma fracção do total que considere justa. Não fosse a humana cobiça, e esta matemática tão conciliadora há muito teria acabado com os litígios entre herdeiros.

Os capítulos IV e V expõem dois dos princípios mais profícuos da combinatória: o das gaiolas e dos pombos, e o da inclusão e exclusão. Entre as aplicações no livro do primeiro, destacamos a prova da periodicidade da expansão decimal dos racionais; do segundo, a dedução da fórmula da função φ de Euler e a contagem dos desencontros (permutações de n objectos que não fixam nenhum deles).

O capítulo VI abre com um quadro listando o número de distribuições de n objectos por k caixas, conforme os objectos ou as caixas se considerem ou não distinguíveis, e sejam ou não permitidas caixas vazias: no total há 8 interpretações do enunciado. Algumas delas conduzem a entidades já conhecidas, como sejam os coeficientes binomiais; outras são pretexto para revisitar as funções geradoras; e outras relacionam-se com os números de Stirling, que por sua vez levam aos números de Bell e à contagem das partições de um conjunto.

Como já dissemos, o capítulo VII trata de recorrências lineares, também chamadas equações às diferenças. A modo de complemento, dão-se exemplos de recorrências não lineares, mas parece-nos forçado incluir o *problema* $3x$+1 nessa categoria. Na formulação corrente do problema



(ver [1]), averigua-se da convergência para 1 dos iterados de uma certa função de N em N; na versão do livro, o que se quer é determinar se uma outra função está definida em todo o N. Apesar de as duas versões serem equivalentes, o carácter dinâmico do problema desaparece na reformulação; e ao acolher-se, no âmbito da recorrência em inteiros, uma relação de que nem o domínio é conhecido, estica-se essa noção a ponto de a tornar irreconhecível.

A álgebra entra em cena no capítulo VIII com os grupos de permutações. Entre as permutações de um conjunto, há umas especiais, as *transposições*: são as que trocam dois elementos e fixam todos os restantes. Sabe-se que cada permutação é a composta de transposições, mas qual o número mínimo de transposições com que se exprime? A resposta é a soma dos comprimentos dos seus ciclos menos o número de ciclos (corolário do teorema 8.1). Infelizmente a demonstração do teorema não é convincente, pois no passo de indução parece admitir-se que, sob certas condições, se a composta de dois ciclos disjuntos se escrever como produto de transposições, então cada uma dessas transposições troca dois elementos do mesmo ciclo. Melhor seria ter-se demonstrado indutivamente a afirmação do corolário e não a do teorema (que diz apenas respeito às permutações com um único ciclo não trivial).

Uma dificuldade do livro é o modo como fala de permutações: motivado pela escrita usual como matriz de duas linhas, em que na primeira se põem os números de 1 a n e na segunda $\sigma(i)$ fica debaixo de *i*, o autor diz que o efeito da permutação σ é que *$\sigma(i)$ substitui i* ou *ocupa o lugar de i*. Ora a imagem mental que quase todos nós temos de uma função – e as permutações também são funções – é justamente a oposta; por isso dizemos que *i* é *enviado em $\sigma(i)$*. Esta fuga à norma pode confundir o leitor desprevenido; e obriga, nas páginas 218-9, a que, dada uma permutação σ de um conjunto finito *V*, se use σ^{-1} (e não σ, como seria natural) para definir a permutação induzida no conjunto das colorações de *V*.

A fórmula de Burnside-Frobenius para o número de órbitas da acção dum grupo finito aparece no último capítulo, com aplicações à contagem das colorações não isomorfas de grafos ou outras estruturas finitas. O capítulo culmina com a teoria de Pólya-Redfield, que condensa, num polinómio formal, informação sobre todas as colorações possíveis de n objectos com k cores, arrumando-as em classes segundo a acção de um dado grupo. A aplicação que no livro ocupa maior extensão é justamente dessa teoria: trata-se de saber quantas operações distintas pode realizar o mesmo circuito lógico se permutarmos os seus dados de entrada.

Este livro é uma óptima escolha para um curso universitário de combinatória, mas o professor que o adopte terá que ponderar a selecção de assuntos. A nível do 1º ano é aconselhável omitirem-se os tópicos mais difíceis (como alguns nos capítulos I e IX); mas, para alunos com maior maturidade, poderão ser esses tópicos a dar outro sal ao curso. Finalmente, pelo estilo desempoeirado e pelas numerosas sugestões de leitura, o livro presta-se muito bem ao auto-estudo e é uma utilíssima obra de referência. Oxalá não tarde o prometido volume do mesmo autor sobre teoria dos grafos.

Referências

[1] Vitor Araújo, *O problema $3x+1$*. Gazeta de Matemática 146 (2004), pp. 38-44
[2] Jean Dieudonné (coord.), *Abregé d'histoire des mathématiques* (vols. I e II), Hermann, 1978
[3] Morris Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972
[4] George E. Martin, *Counting: the art of enumerative combinatorics*, Springer, 2001

Esta secção propõe-se publicar recensões aprofundadas de livros de Matemática editados recentemente em português, dando preferência a livros que interessem a um público alargado.
Agradecemos aos leitores da Gazeta de Matemática o envio de sugestões de livros que julguem merecedores da nossa atenção.
Contacto do editor da secção: Paulo Ventura Araújo (FCUP);
e-mail: paraujo@fc.up.pt