Lourdes B. Afonso
Faculdade de Ciências e Tecnologia e Centro de Matemática e Aplicações da NOVA
lbafonso@fct.unl.pt

COMO FUNCIONA UM SISTEMA DE BONUS MALUS NO SEGURO AUTOMÓVEL?

Um Sistema de Bonus Malus (SBM), no seguro automóvel, é uma forma de tarifação *a posteriori*. Neste texto iremos mostrar o porquê da existência de Sistemas de Bonus Malus, como se definem e obter uma escala ótima de prémios. Será apresentado um exemplo simples para melhor compreensão do modelo. Sendo um tema vasto, na última secção serão identificadas algumas referências bibliográficas para o leitor que pretenda aprofundar os conhecimentos no tema.

1. A IMPORTÂNCIA DE UM SISTEMA DE BONUS MALUS

Um Sistema de Bonus Malus (SBM) é uma forma de tarifação *a posteriori* no seguro automóvel. Quando nos dirigimos a um mediador de seguros para celebrar um contrato de seguro automóvel, fornecemos informações que irão ser transformadas nas variáveis de tarifação para a seguradora nos atribuir o preço do seguro (prémio). Estas variáveis pretendem agrupar riscos semelhantes em grupos de tarifação. Alguns exemplos são: potência; cilindrada e marca do veículo; ano de registo; idade do condutor; anos de carta; zona geográfica de condução. Este prémio é obtido recorrendo usualmente a modelos lineares generalizados. Esta forma de tarifação é denominada tarifação *a priori* pois é a tarifa calculada sem conhecimento prévio do comportamento de condução de cada condutor. A destreza ao volante, o respeito pelo Código da Estrada, a agressividade na condução são variáveis que têm influência na sinistralidade automóvel, mas que não são facilmente mensuráveis, logo não são utilizadas no apuramento do prémio. O mecanismo utilizado para colmatar esta falha foi considerar uma correção ao prémio tendo em conta a sinistralidade declarada por cada segurado. No final do ano do contrato e mediante o número de sinistros declarados, o prémio *a priori* é ajustado sofrendo um desconto ou agravamento de acordo com as regras do SBM implementado na seguradora. Devido à liberalização do mercado segurador, cada seguradora pode definir o seu SBM, levando a que os segurados, em alguns casos, procurem uma seguradora que lhe proporcione melhores descontos em caso de boa condução e baixos agravamentos em caso de ocorrência de sinistros. Da parte da seguradora, é importante ter um SBM equilibrado. Os descontos traduzem-se em perda de prémio e os agravamentos podem traduzir-se em perda de clientes, nenhum dos casos benéfico para o negócio da seguradora. Na avaliação de SBM podem considerar-se duas abordagens, a primeira, a abordagem clássica e mais usual, é considerar que a carteira é fechada, ou seja, não se consideram entradas e saídas de segurados durante o período de análise. A segunda abordagem é considerar a carteira aberta, um cenário mais real, em que os segurados entram e saem da carteira. Na generalidade, os SBM consideram apenas o número de sinistros para definir o *bonus* (desconto) ou o *malus* (agravamento), no entanto já existem SBM que consideram também o montante de sinistro pago pela seguradora. São contabilizadas como sinistros as declarações de sinistro que acionam a apólice do segurado. Uma árvore que caiu em cima do automóvel e que levou a acionar a cobertura de danos próprios conta como sinistro, mas a reparação de um dano que tenha sido da responsabilidade de outro segurado não é contabilizada como sinistro.

2. O MODELO MATEMÁTICO

No que se segue iremos utilizar a abordagem clássica (modelo fechado) e um SBM elaborado considerando apenas o número de sinistros declarado.

No que se segue toma-se como referência [5] e [12].

Um Sistema de Bonus Malus pode ser caracterizado por:

- O período de vigência das apólices é de idêntica duração, usualmente um ano;
- As apólices estão distribuídas por um número finito de classes e mantêm-se nessa classe durante um período finito de tempo, usualmente um ano;
- A classe para a qual o segurado transita ao final do período depende apenas do número de sinistros declarado nesse período.

Considere-se que o SBM tem s classes denominadas por $C_1, C_2, \dots C_s$, ordenadas do maior desconto para o maior agravamento.

Um SBM fica definido pelo trio $S = (T, b, C_{i_0})$, sendo,

- $b = (b_1, b_2, \dots b_s)$ a escala de prémios. $b_k > 0$ é um fator multiplicativo a aplicar ao prémio *a priori*.
- C_{i_0} a classe de entrada no sistema, i.e., a classe onde se colocam os novos segurados que pagam 100% do prémio *a priori*.
- $T = [T_{i,j}]$ as regras de transição do sistema, representadas por uma matriz $s \times s$. Estas regras descrevem como é que o segurado, no final do período, transita entre as classes do sistema de acordo com o número de sinistros declarado nesse período, independentemente do historial do segurado. Para cada par ordenado (i, j) defina-se $T_{i,j}$ como o conjunto dos inteiros r tais que uma apólice pertencente a C_i transite para C_j no fim do período por ter originado r sinistros nesse período. T deve ser tal que $\bigcup_{j=1}^{s} T_{i,j} = 0, 1, 2, \dots$ e $T_{i,j} \cap T_{i,j'} = \emptyset$ sempre que $j \neq j'$.

Estes SBM são, na sua maior parte, considerados sistemas sem memória, pois basta saber a classe em que o segurado se encontra e o número de sinistros declarados no período anterior para determinar a classe para onde transitará, podendo o SBM ser estudado como uma Cadeia de Markov.

Os SBM podem ser avaliados do ponto de vista do segurado ou da seguradora. No primeiro caso conhecendo a frequência de sinistros, λ fixo, a probabilidade de transição num passo de C_i para C_j é:

$$
\begin{aligned}
p_{T,\lambda}(i,j) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\lambda) t_{ij}(k) \\
&= \Pr_\lambda \left(Z_{S,n+1} = j \mid Z_{S,n} = i \right), \quad i, j = 1, \dots, s
\end{aligned}
$$

onde $p_k(\lambda)$ é a probabilidade de um segurado, com frequência de sinistralidade λ, dar origem a k sinistros numa anuidade e $Z_{S,n}$ representa a classe de bónus de uma apólice no período n.

A distribuição de $Z_{S,n}$ para o λ fixo é:

$$
p_{S,\lambda}^{(n)}(j) = \Pr_\lambda \left(Z_{S,n} = j \right), \quad j = 1, 2, \dots, s.
$$

Não considerando entradas nem saídas do sistema, se a cadeia for irredutível e finita será aperiódica e recorrente e a distribuição limite, $\pi_{T,\lambda}(j)$, coincide com a distribuição estacionária, ou seja, com o vetor próprio esquerdo associado ao valor próprio unitário da matriz $P_{T,\lambda} = [p_{T,\lambda}(i,j)]$. Esta matriz é a matriz de probabilidades de transição num passo da Cadeia de Markov que representa o SBM com as probabilidades $p_{T,\lambda}(i,j)$ a satisfazer $p_{T,\lambda}(i,j) \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{s} p_{T,\lambda}(i,j) = 1$. A distribuição limite é dada por:

$$
\pi_{T,\lambda}(j) = \lim_{n \to +\infty} p_{S,\lambda}^{(n)}(j), \quad j = 1, 2 \dots, s.
$$

Caso esteja a avaliar-se do ponto de vista da seguradora, para se obterem os elementos da matriz de probabilidades de transição em n passos, $P_T^{(n)}$, integra-se em λ de acordo com a distribuição estrutural, ou seja, $p_T^{(n)}(i,j) = \int_0^\infty p_{T,\lambda}^{(n)}(i,j) dU(\lambda), \quad i, j = 1, 2, \dots, s$. A distribuição limite será

$$
\pi_T(j) = \Pr\left(Z_T = j \right) = \int_0^\infty \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, s \tag{2.1}
$$

A distribuição de Poisson pode ser adequada para descrever o número de sinistros ocorridos a um determinado segurado num determinado período de tempo. No entanto, quando se pretende descrever o número de sinistros ocorridos a um segurado retirado ao acaso da carteira, a distribuição que fornece melhor ajustamento é a Poisson mista. Esta distribuição reflete a heterogeneidade dos riscos inerentes ao comportamento de cada um dos segurados, permitindo que a variância seja superior à média. O parâmetro da Poisson, usualmente, segue uma distribuição gama ou distribuição Inversa Gaussiana. No caso de $N \sim P(\Lambda)$ e

$$\Lambda \sim G\left(\alpha, \frac{1-p}{p}\right)$$

com $E(\Lambda) = \alpha\beta, N \sim BN(\alpha, p)$[1]. λ é a variável de estrutura. Mais detalhe poderá ser encontrado em [12], [10] ou [16].

A distribuição limite, indica que, numa perspetiva de longo prazo, $\pi_T(1)$ por cento das apólices estarão na classe mais bonificada e $\pi_T(s)$ estarão na classe de maior agravamento. Atendendo a que as classes de desconto implicam uma perda de prémio para a seguradora, é importante ter a perceção de como vai evoluindo o prémio de um segurado que entre na classe C_{i_0}, o tal segurado que não tem desconto nem agravamento. Em condições de estacionaridade, isto é, multiplicando a distribuição limite pelo prémio de cada classe, obtemos o prémio médio de estacionaridade. Este prémio indica o valor que a seguradora espera receber em condições de estacionaridade da carteira.

Para determinar uma escala ótima de prémios, o modelo mais usual é o proposto por Norberg em 1976, [14], que determina o prémio que deverá ser cobrado às apólices em cada classe de bónus quando se atinge a estacionaridade da carteira, através da aplicação da estatística Bayesiana e de uma abordagem semelhante à utilizada em Teoria da Credibilidade, obtendo-se:

$$b^N(j) = \frac{1}{\pi_T(j)} \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^{s} \lambda \cdot \pi_{T,\lambda}(j) dU(\lambda), \quad j = 1, \ldots, s. \tag{2.2}$$

O modelo de Borgan, Hoem e Norberg de 1981, [4], é uma generalização do modelo anterior. Neste modelo os autores sugerem a introdução de um sistema de ponderadores não negativos, $\{w_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, cuja soma seja a unidade. Cada ponderador representa o peso a atribuir a cada período n e w_0 o peso a atribuir à distribuição estacionária. Por vezes os resultados obtidos não são crescentes, isto é, existe uma classe superior que tem um prémio mais baixo do que a anterior. Gilde e Sund em 1989, [8], resolvem este problema linearizando a escala. Os autores garantem assim que os prémios estão ordenados de acordo com a gravidade das classes e que evoluem de uma forma regular. Andrade e Silva em 1991, [3], apresenta uma escala geométrica que verifica que o quociente entre os prémios de duas classes consecutivas é constante.

3. UM EXEMPLO SIMPLES

Para melhor compreensão dos conceitos apresentados iremos acompanhar um exemplo fictício com um número reduzido de classes. Os cálculos são efetuados recorrendo ao *software* R Cran versão 3.6.3. Aplicações a casos reais podem ser consultadas em [1], [2], [9], entre outros. A descrição do SBM de cada seguradora é de divulgação obrigatória e pode ser consultada nas condições gerais da apólice de seguro.

Assim, considere-se um SBM composto por três classes de desconto, três classes de agravamento e uma classe de entrada (sem desconto, nem agravamento).

Por cada anuidade sem sinistros a apólice desce uma classe e por sinistro declarado sobe duas classes. A escala de prémios é b = (0,5; 0,65; 0,8; 1; 1,2; 1,5; 2,0.)Numerando as classes por ordem crescente de propensão à sinistralidade:

- C1 - classe de 50% de desconto.
- C_2 - classe de 35% de desconto.
- C3 - classe de 20% de desconto.
- C_4 - classe de 0% de desconto ou agravamento.
- C5 - classe de 20% de agravamento.
- C_6 - classe de 50% de agravamento.
- C7 - classe de 100% de agravamento.

O trio $S = (T, b, C_{i_0})$ será definido por:

- $b = (0,5; 0,65; 0,8; 1; 1,2; 1,5; 2,0)$ indicando, por exemplo, que um segurado na classe C_2 em que $b_2 = 0,65$ paga 65% do seu prémio *a priori*.
- C_{i_0} é a classe C4.
- A matriz de transição será dada pela tabela 1 e cuja Cadeia de Markov, recorrendo ao package *igraph*, pode ser consultada na figura 1.

[1] Distribuições definidas como no package *stats* do *software* R Cran

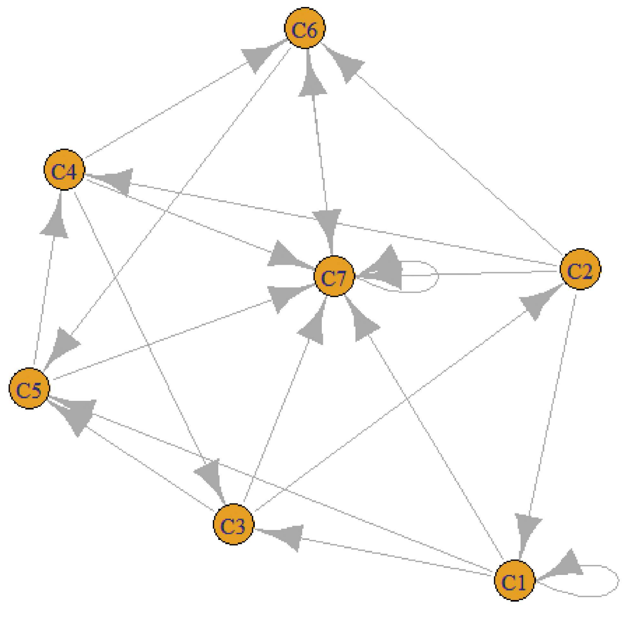

Figura 1. Cadeia de Markov representativa de *T*.

Tabela 1. Matriz de Transição do SBM.

$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} \{0\} & - & \{1\} & - & \{2\} & - & \{3,4,\ldots\} \\ \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2\} & \{3,4,\ldots\} \\ - & \{0\} & - & - & \{1\} & - & \{2,3,\ldots\} \\ - & - & \{0\} & - & - & \{1\} & \{2,3,\ldots\} \\ - & - & - & \{0\} & - & - & \{1,2,\ldots\} \\ - & - & - & - & \{0\} & - & \{1,2,\ldots\} \\ - & - & - & - & - & \{0\} & \{1,2,\ldots\} \end{array} \right) \end{array}.$$

Tabela 2. Número de sinistros declarados na carteira.

N.º de Sinistros	N.º de Apólices
0	408 348
1	31 993
2	2 010
3	133
4	6
Total	442 490

Analisando a matriz das Regras de Transição, verifica-se que a Cadeia de Markov assim definida é uma cadeia irredutível, uma vez que todas as classes comunicam entre si. É aperiódica, pois existem duas classes de período 1 (C_1 e C_7), e, sendo irredutível, cada um dos seus estados tem o mesmo período e igual a um.

Recorrendo ao package *markovchain* e à função *summary*, do *software* R Cran, obtemos a seguinte classificação da Cadeia de Markov:

```
BMS Markov chain that is composed by:
Closed classes:
C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7
Recurrent classes:
{C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7
Transient classes:
NONE
The Markov chain is irreducible
The absorbing states are: NONE
```

Supondo que, do histórico da seguradora, se apura a informação da tabela 2 sobre a frequência de sinistralidade recente (informação retirada de [1] ou [2]), iremos começar por ajustar uma distribuição ao número de sinistros declarados por um segurado retirado ao acaso da carteira.

Para obter os estimadores de verosimilhança para os parâmetros de uma Poisson e de uma Binomial Negativa recorremos à função *fitdistr* do package *MASS*. Testam-se agora as seguintes hipóteses recorrendo ao teste do Qui-Quadrado de Pearson $H_0 : N \sim P(\lambda = 0,08234)$ com $p - value < 2,2e - 16$ e $H_0 : N \sim BN(\alpha = 1,600322, p = 0,951068)$ com $p - value = 0,6779$. Assim, assume-se $N \sim P(\Lambda)$ e $\Lambda \sim G(1,600322; 0,0514)$.

O cálculo da expressão (2.1) apenas é possível recorrendo a métodos numéricos, pelo que necessitamos de discretizar a distribuição Gama. Iremos recorrer ao package *atuar* aplicando *discretize (pgamma(x, shape=1,600322, scale=0,05144948), method = "rounding"*, from = 0, to = 2, *step* = 1/100). O resultado desta instrução é u^d_λ, o vetor das probabilidades da distribuição Gama discretizada. Assim a distribuição limite será

$$\pi_T(j) = \sum_\lambda \pi_{T,\lambda}(j) u^d_\lambda, \quad j = 1, 2, \ldots, s. \tag{3.1}$$

Neste exemplo a distribuição limite é:

$$\pi_T = (0,7964; 0,0678; 0,0766; 0,0230; 0,0191; 0,00961; 0,0076)$$

Esta distribuição limite indica que numa perspetiva de longo prazo, 79,64% das apólices estarão na classe mais bonificada e cerca de 0,7% estarão na classe de maior agravamento.

Multiplicando a distribuição limite pelo prémio de cada classe (vetor *b*) obtém-se o prémio médio de estacionaridade de 57,9 para um prémio à entrada de 100.

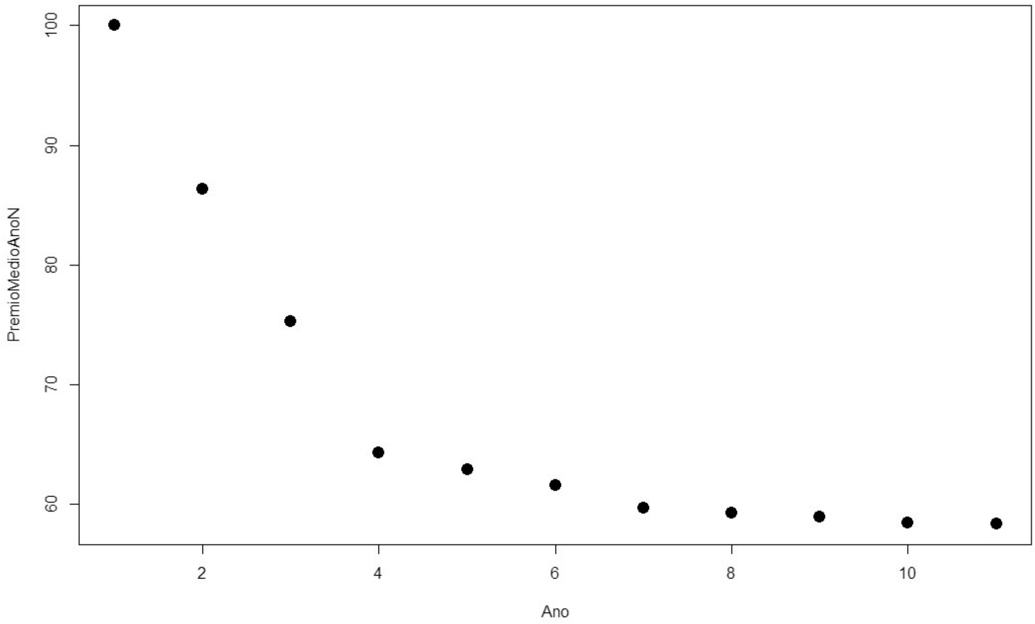

Figura 2. Evolução do prémio médio ao longo do tempo.

Ou seja, a longo prazo, com esta sinistralidade e estas regras do SBM, a seguradora estará a cobrar quase metade do prémio *a priori*. Este indicador sugere que as regras de transição deste SBM não são severas. Na figura 2 pode observar-se a evolução do prémio médio de um segurado que entra na Classe 4. O prémio decresce rapidamente nos primeiros quatro anos, estabilizando em torno dos 60 a partir daí.

Neste exemplo o vetor dos prémios está definido à partida. Aplicando (2.2), obtemos a escala ótima de Norberg $b^N(j) = (0,4914; 0,7287; 0,7581; 1,0000; 1,0731; 1,2997; 1,4228)$. Observa-se que o prémio na classe mais bonificada é semelhante, cerca de 50%, mas na classe mais gravosa a proposta de Norberg é 142,28%, sendo inferior aos 200% considerado em b. Por vezes os resultados que se obtêm aplicando as escalas ótimas não são atrativos do ponto de vista comercial. É sempre possível redefinir a escala, avaliar a eficiência dos diferentes SBM e escolher o SBM adequado à seguradora.

4. ONDE APROFUNDAR OS CONHECIMENTOS

Mostrou-se o que é um Sistema de Bonus Malus, para que serve e algumas conclusões que podem ser importantes. Não sendo possível uma apresentação mais exaustiva do tema, deixamos algumas referências bibliográficas caso o leitor pretenda ter um ponto de partida para aprofundar os conhecimentos.

Existem, também, alguns indicadores para avaliar e comparar diferentes SBM que podem ser consultados em [13] e [12]. Em [11] pode ser consultado um estudo comparativo de 30 SBM.

Em 1997, Pinquet, [15] apresenta um SBM que considera, além do número de sinistros, também o montante de sinistro pago pela seguradora. Mais recentemente surgiram trabalhos considerando o modelo aberto, um modelo mais complexo mas mais próximo da realidade das seguradoras, uma vez que permite a entrada e a saída dos segurados em qualquer classe, [6] e [9] são alguns exemplos. Afonso et all, em 2017 [1], e em 2020 [2], avaliam a probabilidade de ruína, da seguradora, num horizonte temporal finito na presença de um SBM no modelo fechado e no modelo aberto, respetivamente.

O futuro dos modelos de tarifação *a priori* está a mudar com a introdução da telemática. As variáveis de tarifação são lidas do computador do automóvel e a tarifação avizinha-se quase instantânea. Quem sabe o que o futuro nos reserva relativamente à tarifação no automóvel e em particular aos Sistemas de Bonus Malus?

REFERÊNCIAS

[1]Afonso, L.; Cardoso, R.; Egídio dos Reis, A. e Guerreiro, G. (2017) "Measuring The Impact Of A Bonus-Malus System In Finite And Continuous Time Ruin Probabilities For Large Portfolios In Motor Insurance", *ASTIN Bulletin*, 47 (2), 417-435.

[2] Afonso, L; Cardoso, R.; Egídio dos Reis, A. e Guerreiro, G. (2020). "Ruin Probabilities And Capital Requirement for Open Automobile Portfolios With a Bonus-Malus System Based on Claim Counts", *Journal of Risk and Insurance*, 87(2), 501-522.

[3] Andrade e Silva, J. (1991), *Estruturas Tarifárias nos Ramos Reais da Indústria Seguradora - Uma aplicação ao sector automóvel em Portugal*, Instituto Superior de Economia e Gestão.

[4] Borgan, Ø, J. Hoem e R. Norberg (1981), "A Non Asymptotic Criterion for the Evaluation of Automobile Bonus System", *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 165-178.

[5] Centeno, L. (2003), . *Teoria do Risco na Actividade Seguradora*. Vol. 1. 211 pp.

[6] Centeno, L. e Andrade e Silva, J. (2001), "Bonus Systems in Open Portfolio", *Insurance Mathematics e Economics*, pp. 341-350.

[7] Frangos, N. e Vrontos, S. D. (2001) "Design Of Optimal Bonus-Malus Systems With A Frequency And Severity Component On An Individual Basis In Automobile Insurance", *ASTIN Bulletin* 31 (1), 1-22

[8] Gilde, V. e Sundt, B. (1989), "On Bonus Systems with Credibility Scales", *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 13-22.

[9] Guerreiro, G.R.; Mexia, J.T. e Miguens, M.F. (2014) "Statistical Approach for Open Bonus Malus", *ASTIN Bulletin*, 44 (1), 63-83.

[10] Grandell, J. (1997), *Mixed Poisson Processes*, Chapman & Hall.

[11] Lemaire, J. e Zi, H. (1994), "A Comparative Analysis of 30 Bonus Malus Systems", *ASTIN Bulletin*, 24 (2), 287-309.

[12] Lemaire, J. (1995), *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*, Kluwer Academic Publishers.

[13] Loimaranta, K. (1972), "Some Asymptotic Properties of Bonus Systems", *ASTIN Bulletin*, 6, pp. 233-245.

[14] Norberg, R. (1976), "A Credibility Theory for Automobile Bonus System", *Scandianvian Actuarial Journal*, pp. 92-107.

[15] Pinquet, J. (1997). "Allowance for Cost of Claims in Bonus-Malus Systems". *ASTIN Bulletin*, 27(1), 33-57.

[16] Sichel, H. (1971), "On a Family of Discrete Distributions Particular Suited to Represent Long Tailed Frequency Data", Laubscher N. , *Proccedings of Third Symposiums of Mathematics Statitistics*, pp.51-97.

SOBRE A AUTORA

Lourdes B. Afonso é professora associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, investigadora no Centro de Matemática e Aplicações e professora convidada da NOVA IMS Information Management School. É neste momento presidente da direção do Instituto dos Atuários Portugueses (https://atuarios.pt). É atuária responsável dos ramos não vida, certificada pela ASF. Aplica matemática a problemas de atuariado desde 1994.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação

pt-maths-in@spm.pt