

## O TEOREMA DE MONSKY

Pode um quadrado ser dividido num número ímpar de triângulos com áreas iguais? Este problema foi resolvido em 1970. A respectiva demonstração é sedutora.

### 1. INTRODUÇÃO

É fácil dividir um quadrado num qualquer número par de triângulos de áreas iguais: para obtermos  $2n$  tais triângulos, podemos por exemplo dividir uma das diagonais em  $n$  segmentos de igual comprimento e unirmos as extremidades dos segmentos aos vértices da outra diagonal.

Surge a questão: é possível dividir um quadrado num

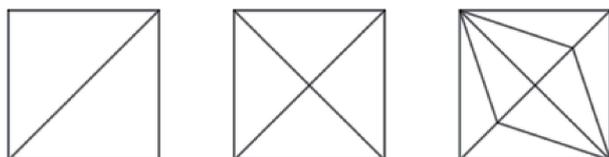


Figura 1. Dividindo um quadrado num número par de triângulos de áreas iguais.

número ímpar de triângulos de áreas iguais? A resposta a este problema é o Teorema de Monsky, datado de 1970 [6].

As origens do Teorema de Monsky são curiosas, desde logo por não serem remotas. Em 1965, Fred Richman, na Universidade do Novo México em Las Cruces, considerou incluir este problema num exame de mestrado, até ter desistido desse intento ao constatar que não era capaz de resolvê-lo! Richman mencionou o problema ao seu colega John Thomas, tendo este obtido alguns resultados parciais que publicou em 1968 [9]. Nas palavras de Thomas, "o referee<sup>1</sup> pensava que o problema era bastante fácil (embora não fosse capaz de o resolver) e que era pro-

vavelmente bastante conhecido (embora não encontrasse referência para ele)".

Dois anos depois, em 1970, surge a demonstração completa de Monsky. É uma prova sedutora: resolve o que aparenta ser um problema simples da Geometria Euclidiana com ferramentas da matemática do século XX, aliando combinatória (via Lema de Sperner) com ideias da teoria dos números e da álgebra avançada moderna (via valorações  $p$ -ádicas).

**Teorema (Monsky).** *Não é possível dividir um quadrado num número ímpar de triângulos com áreas iguais.*



Figura 2. Paul Monsky.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Refere-se ao matemático anónimo que analisou o artigo a pedido do corpo editorial da revista em que o submeteu para publicação.

<sup>2</sup> By Schmid, Renate – [https://opc.mfo.de/detail?photo\\_id=11637](https://opc.mfo.de/detail?photo_id=11637), CC BY-SA 2.0 de, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18315985>

## 2. O LEMA DE SPERNER

Temos usado as palavras *divisão*, *dividir* num contexto geométrico... Vamos preferir o termo *dissecação* em desfavor de *divisão*, dado que este tem um pendor mais aritmético. Definimos formalmente uma *dissecação* de um polígono  $p$  como sendo uma família finita de triângulos cuja reunião é  $p$  e cujos interiores são disjuntos dois a dois. Um *triângulo da dissecação* será um dos triângulos dessa família. Uma dissecação de  $p$  diz-se *simplicial* se a intersecção das fronteiras de dois triângulos que a constituem for vazia, um vértice em comum, ou um lado comum.

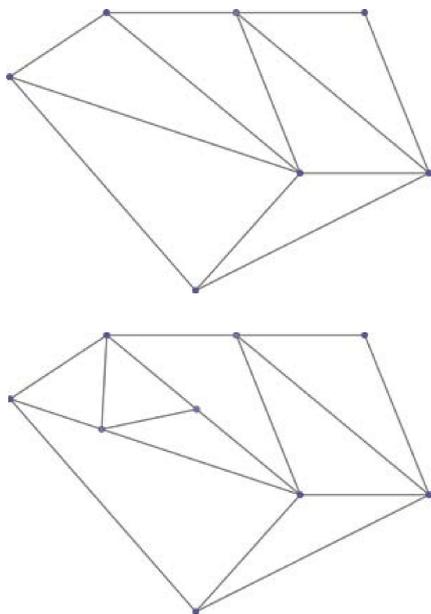


Figura 3. Dissecação simplicial e dissecação não simplicial.

Vamos etiquetar cada vértice num polígono  $P$  com uma de três etiquetas  $A$ ,  $B$  ou  $C$ . Dizemos que um segmento é *completo* se as suas extremidades forem respectivamente etiquetadas com as etiquetas  $A$  e  $B$ , ou  $B$  e  $A$ . Note-se que estamos a atribuir uma ordem às etiquetas:  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Finalmente, dizemos que o polígono  $P$  é *completo* se tem um número ímpar de lados completos. Por exemplo, o hexágono na figura 4 é completo, pois tem três lados completos.

Assim, um triângulo é completo se e só se as três etiquetas  $A$ ,  $B$  e  $C$  surgem nos vértices.

Dada uma dissecação de um polígono, vamos querer etiquetar todos os vértices de todos os triângulos que surgem na dissecação. O Lema de Sperner garante que

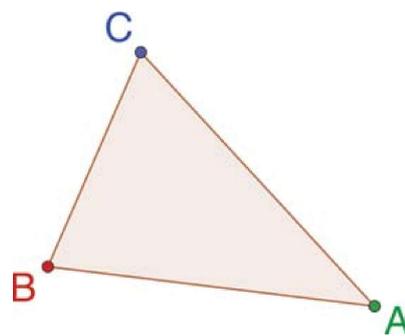


Figura 4. Hexágono completo.

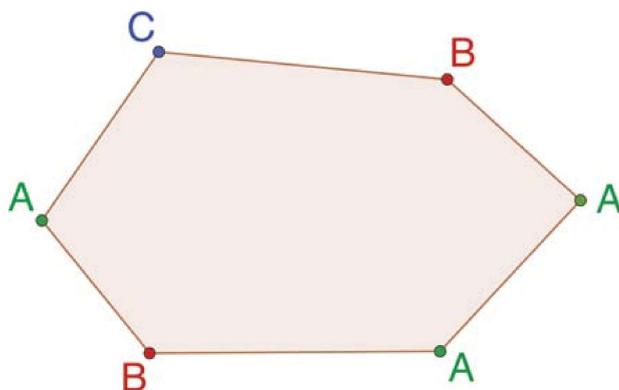


Figura 5. Triângulo completo.

se um triângulo é completo, e se os vértices de cada lado do triângulo não recebem mais do que dois tipos de etiqueta, então numa sua qualquer dissecação simplicial pelo menos um dos triângulos da dissecação é completo.

O Lema de Sperner, datado de 1928 e da autoria do matemático alemão Emanuel Sperner, tem como aplicação mais famosa a sua utilização na demonstração habitualmente preferida do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, o qual nos diz que qualquer função contínua de um disco fechado nele próprio contém algum ponto fixo.

O Lema de Sperner também é usado na demonstração do Teorema de Monsky. Bom, na verdade precisamos de uma sua variação, caso não queiramos uma demonstração válida apenas para dissecações simpliciais. A seguinte versão "não simplicial" vem com um preço: exigimos que na dissecação não seja possível termos três vértices colineares com etiquetas todas distintas.

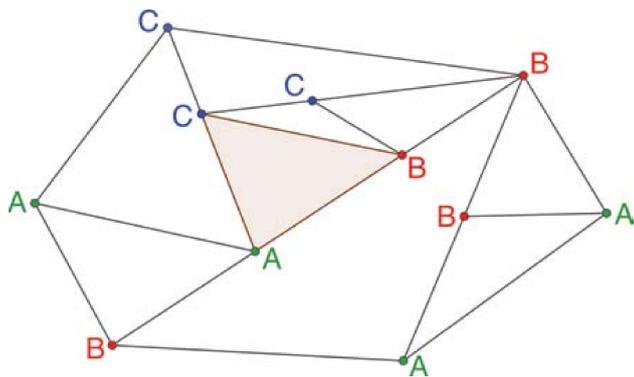


Figura 6. Lema de Sperner não simplicial.

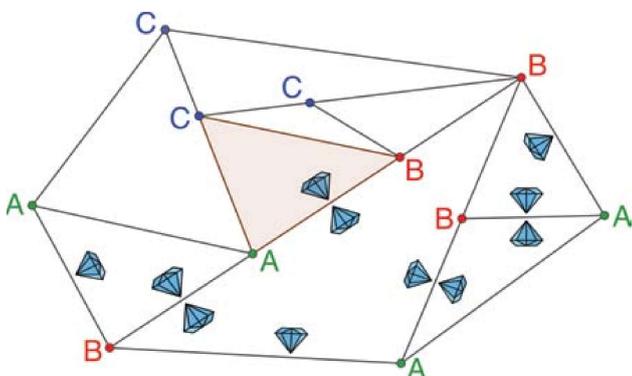


Figura 7. Demonstração do Lema de Sperner não simplicial.

**Lema** (Lema de Sperner, versão não simplicial). *Consideremos num polígono uma dissecação cujos vértices são marcados por uma das etiquetas A, B ou C; os vértices colineares não recebem mais do que dois tipos de etiquetas. Se o polígono for completo, então pelo menos um dos triângulos da dissecação é completo.*

Note-se que se na figura 6 trocámos a etiqueta B no triângulo a cheio por C, então deixámos de ter qualquer triângulo completo.

A demonstração dá-nos mais do que necessitamos, informando-nos de que o número de lados completos do polígono é ímpar se e só se o número de triângulos completos na dissecação é ímpar.

*Prova do Lema de Sperner não simplicial.* Em cada triângulo da dissecação, coloquemos um diamante junto

de cada segmento na sua fronteira que seja completo (cf. figura 7). A partir do facto de que cada lado do triângulo não recebe mais do que duas etiquetas, deduz-se que um (lado de um) triângulo é completo se e só se tem um número ímpar de diamantes. Portanto, o número de diamantes tem a mesma paridade que o número de triângulos completos.

Contemos os diamantes de outro modo. Junto de cada segmento completo no interior do polígono, há dois diamantes; junto de cada segmento completo na fronteira do polígono, só há um diamante; como cada lado não recebe mais do que duas etiquetas, cada lado completo do polígono tem um número ímpar de diamantes. Assim, o número de diamantes tem a mesma paridade que o número de lados completos do polígono.

Com estas duas formas de contar os diamantes, concluímos que o número de lados completos do polígono tem a mesma paridade que o número de triângulos completos na dissecação. □

### 3. VALORAÇÕES $p$ -ÁDICAS

Mudemos de ambiente. Seja  $p$  um número primo. Denote-se por  $v_p(n)$  o maior natural  $k$  tal que  $p^k$  divide  $n$ , onde  $n$  é um qualquer inteiro. A função  $v_p$  "mede a divisibilidade" de  $n$  por  $p$ . Por exemplo, temos  $v_5(75) = 2$ ,  $v_2(40) = 3$  e  $v_2(75) = 0$ . Note-se que esta definição faz sentido mesmo quando  $n$  é negativo, tendo-se  $v_p(n) = v_p(-n)$ .

E que valor  $v_p(0)$  tem? Como  $p^k$  divide 0 qualquer que seja o natural  $k$ , podemos dizer que  $v_p(0)$  é infinito, escrevendo  $v_p(0) = \infty$ . Vamos considerar o conjunto  $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , convencionando que  $\infty > x$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , com as habituais regras aritméticas da álgebra dos limites.

Qual é o próximo passo? Estender  $v_p$  a  $\mathbb{Q}$ , mas de modo a continuarmos com a propriedade

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y).$$

A única forma de o fazer é, para quaisquer inteiros  $a, b$  tais que  $b \neq 0$ , definirmos

$$v_p\left(\frac{a}{b}\right) = v_p(a) - v_p(b).$$

Esta definição também preserva a propriedade

$$v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$$

que, quando  $x, y$  são inteiros, exprime que sempre que  $p^k$  divide  $x$  e  $y$ , então  $p^k$  também divide  $x + y$ . Note-se

que  $v_p(x^{-1}) = v_p(1) - v_p(x) = -v_p(x)$ . Podemos continuar a dizer que  $v_p$  "mede a divisibilidade" por  $p$  de um qualquer número racional. Vejamos dois exemplos que ajudam a interiorizar esta afirmação:

$$v_2\left(\frac{1}{2}\right) = v_2(2^{-1}) = -1,$$

$$v_5\left(\frac{11}{100}\right) = v_5\left(5^{-2}\frac{11}{4}\right) = -2.$$

O leitor pode ainda não saber que um corpo de números reais é um conjunto  $\mathbb{K}$  de números reais contendo 0 e 1 que é fechado para a subtração e a divisão (isto é,  $\mathbb{K}$  é tal que  $a, b \in \mathbb{K}$  implica  $a - b \in \mathbb{K}$ , e  $a, b \in \mathbb{K}$  com  $b \neq 0$  implica  $ab^{-1} \in \mathbb{K}$ ). O menor corpo de números reais que contém os inteiros é o corpo  $\mathbb{Q}$  dos racionais.

Abstraindo as propriedades de  $v_p$ , definimos uma *valoração* em  $\mathbb{K}$  como sendo uma função  $v: \mathbb{K} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$  tal que, para quaisquer  $x, y \in \mathbb{K}$ , se tem:

- $v(xy) = v(x) + v(y)$ ,
- $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$ ,
- $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$ .

Destas propriedades deduz-se facilmente que  $v(1) = 0$ ,  $v(-x) = v(x)$  e que:

- $v(x) < v(y) \Rightarrow v(x) = v(x + y)$ .

A extensão de  $v_p$  a  $\mathbb{Q}$ , introduzida atrás, é uma valoração no corpo dos racionais, que se denomina *valoração  $p$ -ádica*.

Estamos preparados para introduzir o seguinte resultado crucial.

**Teorema.** (Teorema da Extensão das Valorações) *Seja  $v$  uma valoração num corpo  $\mathbb{K}$  de números reais. Então  $v$  pode ser estendida a uma valoração definida em  $\mathbb{R}$ .*

Portanto, podemos estender a valoração  $v_p: \mathbb{Q} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$  a todos os números reais. A demonstração da existência de uma tal extensão é difícil [2]. É de mencionar que a demonstração garante a existência de uma infinidade de extensões de  $v_p: \mathbb{Q} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$  a  $\mathbb{R}$ . Na ausência de ambiguidade, denota-se qualquer uma dessas extensões também por  $v_p$ . A valoração  $v_p: \mathbb{R} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}$  é portanto a valoração  $p$ -ádica nos números reais.

Ainda em  $\mathbb{R}$ , mantém-se em boa medida a intuição de que  $v_p$  mede a divisibilidade por  $p$ . Por exemplo, temos  $v_2(\sqrt[3]{2}) = \frac{1}{3}$ , uma vez que  $1 = v_2(2) = v_2((\sqrt[3]{2})^3) = 3v_2(\sqrt[3]{2})$ . Note-se que  $\sqrt[3]{2}$  é um

número *algébrico* (i.e., é uma raiz de um polinómio de coeficientes racionais). Em contraste, se  $x$  é um número real *transcendente* (i.e., não é algébrico) e  $y$  é um qualquer número real, então a extensão  $v_p$  pode ser escolhida de modo a termos  $v_p(x) = y$ .

#### 4. A DEMONSTRAÇÃO DE MONSKY

A demonstração do Teorema de Monsky alia o Lema de Sperner com as valorações 2-ádicas.

Seja  $p$  um primo. A cada valoração  $v$  definida em  $\mathbb{R}$  vamos associar a seguinte partição de  $\mathbb{R}^2$ :

$$S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v_p(x) > 0 \text{ e } v_p(y) > 0\}$$

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v_p(x) \leq 0 \text{ e } v_p(y) \geq v_p(x)\}$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid v_p(x) > v_p(y) \text{ e } v_p(y) \leq 0\}$$

Na falta de uma representação geométrica para  $S_i$ , podemos observar que se  $\vartheta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^2$  for a função  $\vartheta(x, y) = (v_p(x), v_p(y))$ , então os conjuntos

$$T_0 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X > 0 \text{ e } Y > 0\}$$

$$T_1 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X \leq 0 \text{ e } Y \geq X\}$$

$$T_2 = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 \mid X > Y \text{ e } Y \leq 0\}$$

satisfazem  $S_i = \vartheta^{-1}(T_i)$  e formam uma partição de  $\widehat{\mathbb{R}}^2$  que admite a representação gráfica na figura 8.

A etiquetagem de Monsky é aquela em que se atribui as etiquetas  $A$ ,  $B$  e  $C$  respectivamente aos pontos de  $S_0$ ,  $S_1$  e  $S_2$ .

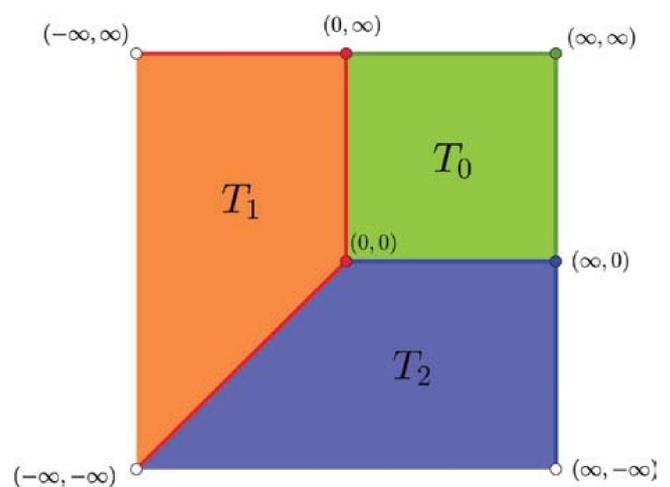


Figura 8. Partição de  $\widehat{\mathbb{R}}^2$ .

O lema seguinte diz-nos que as translações segundo vectores de  $S_0$  não alteram as etiquetas de Monsky.

**Lema.** Se  $Q_0 \in S_0$  e  $P_i \in S_i$ , então  $P_i - Q_0 \in S_i$ .

*Prova.* Recordemos que  $v_p(-x) = v_p(x)$  e que  $v_p(x) < v_p(y) \Rightarrow v_p(x) = v_p(x \pm y)$ .

Façamos  $P_i = (x_i, y_i)$  e  $Q_0 = (a, b)$ . Começemos pelo caso  $i = 0$ . Temos

$$v_p(x_0 - a_0) \geq \min\{v_p(x_0), v_p(a_0)\} > 0$$

e, analogamente,  $v_p(y_0 - b_0) > 0$ , pelo que  $P_0 - Q_0 \in S_0$ .

Passemos ao caso  $i = 1$ . Neste caso, temos  $v_p(x_1) \leq 0 < v_p(a_0)$ , pelo que  $v_p(x_1 - a_0) = v_p(x_1) \leq 0$ .

Por outro lado, deduzimos de  $v_p(y_1) \geq v_p(x_1)$  e  $v_p(x_1) \leq 0 < v_p(b_0)$  que

$$\begin{aligned} v_p(y_1 - b_0) &\geq \min\{v_p(y_1), v_p(b_0)\} \\ &\geq v_p(x_1) = v_p(x_1 - a_0). \end{aligned}$$

Concluimos que  $P_1 - Q_0 \in S_1$ . Analogamente se prova que  $P_2 - Q_0 \in S_2$ .  $\square$

No que se segue, denotamos por  $\text{Área}(P)$  a área de um polígono  $P$ .

**Proposição.** Seja  $T$  um triângulo completo, relativamente à etiquetagem de Monsky. Então temos  $v_p(\text{Área}(T)) \leq -v_p(2)$ .

*Prova.* Por hipótese,  $T$  tem vértices  $(x_i, y_i)$  tais que  $(x_i, y_i) \in S_i$  (onde  $0 \leq i \leq 2$ ). Pelo lema anterior, a translação associada ao vector  $(-x_0, -y_0) \in S_0$  não altera as etiquetas. E como também preserva as áreas, podemos supor que  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ . Então temos

$$\text{Área}(T) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - y_1 x_2|,$$

pelo que

$$\begin{aligned} v_p(\text{Área}(T)) &= v_p\left(\frac{1}{2}\right) + v_p(|x_1 y_2 - y_1 x_2|) \\ &= -v_p(2) + v_p(x_1 y_2 - y_1 x_2). \end{aligned}$$

Uma vez que  $(x_1, y_1) \in S_1$  e  $(x_2, y_2) \in S_2$ , temos

$$\begin{aligned} v_p(x_1 y_2) &= v_p(x_1) + v_p(y_2) \\ &< v_p(y_1) + v_p(x_2) = v_p(y_1 x_2). \end{aligned}$$

Recordemos que  $v_p(x_1 y_2) < v_p(y_1 x_2)$  implica que

$v_p(x_1 y_2 - y_1 x_2) = v_p(x_1 y_2)$ , pelo que

$$v_p(\text{Área}(T)) = -v_p(2) + v_p(x_1 y_2).$$

Ora de  $(x_1, y_1) \in S_1$  e  $(x_2, y_2) \in S_2$ , resulta logo que  $v_p(x_1 y_2) = v_p(x_1) + v_p(y_2)$  não é positivo.  $\square$

**Corolário.** Cada recta de  $\mathbb{R}^2$  recebe no máximo duas das etiquetas de Monsky.

*Prova.* Se o corolário fosse falso, então existiria um triângulo  $T$  de área zero e completo relativamente à etiquetagem de Monsky. Pela proposição anterior, teríamos  $v_p(0) \leq -v_p(2)$ , o que é absurdo, uma vez que  $v_p(0) = \infty$ .  $\square$

Designamos por  $m$ -equidissecção uma dissecção em  $m$  triângulos de áreas iguais.

**Corolário.** Se o polígono  $P$  admitir alguma  $m$ -equidissecção que inclui algum triângulo completo relativamente à etiquetagem de Monsky, então  $v_p(m) \geq v_p(2 \cdot \text{Área}(P))$ .

*Prova.* Se  $T$  for um triângulo da  $m$ -equidissecção, então  $\text{Área}(P) = \text{Área}(T) \cdot m$  e

$$\begin{aligned} v_p(2 \cdot \text{Área}(P)) &= v_p(2) + v_p(\text{Área}(P)) \\ &= v_p(2) + v_p(\text{Área}(T)) + v_p(m) \\ &\leq v_p(m), \end{aligned}$$

graças à proposição anterior sobre triângulos completos.  $\square$

*Prova do Teorema de Monsky.* Suponhamos que o quadrado  $P$  admite uma  $m$ -equidissecção. Podemos supor que os vértices de  $P$  são  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  e  $(1,1)$ . Como  $v_2(0) = \infty$  e  $v_2(1) = 0$ , o quadrado  $P$  é completo relativamente à etiquetagem de Monsky associada ao primo  $p = 2$  (cf. figura 9).

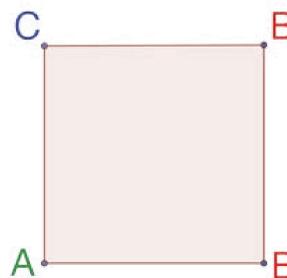


Figura 9. Etiquetagem quando  $p = 2$ .

Recordando que cada recta recebe no máximo duas etiquetas, deduzimos da versão não simplicial do Lema de Sperner que na dissecção existe algum triângulo completo. Aplicando o último corolário, vemos que  $v_2(m) \geq v_2(2) = 1$ , ou seja,  $m$  é par.  $\square$

## 5. CONCLUSÃO

O espectro de um polígono  $P$  é o conjunto dos  $m$  tais que  $P$  admite uma  $m$ -equidissecção. O Teorema de Monsky diz-nos que o espectro do quadrado consiste nos números positivos pares.

O método aqui exposto é o único conhecido para demonstrar o Teorema de Monsky. Elaine Kasimatis [5] aplicou-o para provar que se  $n \geq 5$ , então o espectro de um polígono regular de  $n$  lados é o conjunto dos múltiplos positivos de  $n$ . Kasimatis usou uma generalização ainda mais poderosa do Lema do Sperner, onde se tem em conta a orientação dos segmentos completos.

Como exemplo adicional, e como exercício, propomos ao leitor o seguinte desafio:

**Problema.** *Sejam  $x$  um real positivo e  $T(x)$  o trapézio de vértices  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(x,1)$  e  $(1,0)$ . Mostre que se  $x = \frac{r}{s}$  com  $r, s$  inteiros positivos primos entre si, então o espectro de  $T(x)$  consiste nos múltiplos de  $r + s$ ; e mostre que se  $x$  é transcendente, então o espectro de  $T(x)$  é vazio.*

Note-se que se  $x = 1$ , então temos o Teorema de Monsky. A solução deste problema deve-se a Elaine Kasimatis e Sherman Stein [4].

Continuam as investigações sobre equidissecções, com problemas interessantes em aberto. Vejam-se, por exemplo, os artigos [3, 7].

Avisamos que na literatura se opta frequentemente por uma outra perspectiva sobre  $v_p$ , trabalhando-se no seu lugar com a norma  $p$ -ádica, definida por  $\|x\|_p = p^{-v_p(x,y)}$ . Valorações nos complexos também são consideradas.

O quinto capítulo de [8] oferece uma boa introdução ao método de Monsky e às suas aplicações, contendo uma solução do desafio proposto ao leitor. O capítulo 22 de [1] é de agradável leitura, e lá encontramos um atalho que permite substituir o Teorema da Extensão das Valorações por um resultado mais débil, não se escapando ainda assim às ideias fundamentais de Monsky.

## REFERÊNCIAS

- [1] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK. Including illustrations by Karl H. Hofmann*. Berlin: Springer, 2018.
- [2] Antonio J. Engler and Alexander Prestel. *Valued fields*. Berlin: Springer, 2005.
- [3] Charles H. Jepsen and Paul Monsky. "Constructing equidissections for certain classes of trapezoids". *Discrete Math.*, 308(23):5672-5681, 2008.
- [4] Elaine A. Kasimatis and Sherman K. Stein. "Equidissections of polygons". *Discrete Math.*, 85(3):281-294, 1990.
- [5] Elaine A. Kasimatis. "Dissections of regular polygons into triangles of equal areas". *Discrete Comput. Geom.*, 4(4):375-381, 1989.
- [6] Paul Monsky. "On dividing a square into triangles". *Am. Math. Mon.*, 77:161-164, 1970.
- [7] Daniil Rudenko. "On equidissection of balanced polygons". *J. Math. Sci., New York*, 190(3):486-495, 2013.
- [8] Sherman K. Stein and Sándor Szabó. *Algebra and tiling: homomorphisms in the service of geometry*, volume 25. Washington, DC: MAA, 1994.
- [9] John Thomas. "A dissection problem". *Math. Mag.*, 41:187-190, 1968.