



## A MATEMÁTICA NO TRANSPORTE MARÍTIMO: AFETAÇÃO DE RECURSOS PORTUÁRIOS A NAVIOS

O transporte marítimo é o principal meio de transporte de mercadorias a nível global. Dadas as suas características específicas, esta forma de transporte levanta problemas logísticos complexos. Neste texto vamos discutir a resolução, com base na modelação matemática, do problema que ocorre nos portos e que integra as decisões de alocação dos navios às várias posições do cais e a otimização das operações de carga/descarga.

### 1. INTRODUÇÃO

Cerca de 80% do volume do comércio internacional de mercadorias é transportado por via marítima [6]. Esse transporte assume uma importância crucial para certas economias, como em arquipélagos, onde a dependência por esta forma de transporte é quase absoluta. O transporte marítimo integra vários problemas logísticos, desde problemas estratégicos, como a localização de infraestruturas portuárias, a aquisição de navios, etc., a problemas de natureza operacional, como a otimização das operações de carga e descarga.

Estes problemas são, frequentemente, complexos porque integram decisões de natureza diferente e que têm de ser consideradas em simultâneo. Um exemplo clássico é o problema da gestão dos *stocks* e da determinação das rotas dos navios que procedem ao seu abastecimento, quando uma mesma entidade é responsável quer pela gestão dos navios quer pela gestão dos *stocks*. Como exemplos deste problema, veja-se o da gestão e da distribuição de combustíveis em Cabo Verde, descrito em [1], ou o problema da gestão e da distribuição de ração em viveiros de salmão ao longo da costa norueguesa, descrito em [2].

Relativamente aos problemas de logística, o transporte marítimo é uma área em que as abordagens baseadas em modelos matemáticos podem apresentar algumas vantagens:

- i) O montante dos custos nas operações marítimas é muito elevado, pelo que, sempre que possível, é preferível uma abordagem exata para o planeamento que minimize os custos das operações em detrimento das abordagens, ditas heurísticas, que procuram obter rapidamente soluções para o problema comprometendo a qualidade da solução em termos de custos.
- ii) Muitos dos problemas logísticos, embora complexos, são de dimensões razoavelmente pequenas. Por exemplo, em problemas práticos de determinação de rotas, o número de navios num problema de roteamento marítimo (por vezes poucas unidades) é, em geral, bem inferior ao número de camiões em problemas de roteamento terrestre (por vezes dezenas). Como veremos adiante, a

dimensão dos problemas é um fator determinante na possibilidade ou não de recorrer a métodos exatos.

- iii) As operações marítimas (viagens, cargas/descargas) têm durações longas, pelo que o tempo disponível para o planeamento dessas operações é em geral maior do que em muitos outros problemas de logística, podendo, em muitos casos, demorar várias horas ou dias.

Portanto, métodos exatos de otimização baseados em modelos matemáticos, que são essencialmente enumerativos, requerendo tempos de cálculo computacional elevados, não devem ser imediatamente excluídos, como acontece em muitas outras situações práticas em que se pretendem técnicas de otimização bem mais rápidas que forneçam respostas à medida que a informação é recebida.

De entre os vários problemas que ocorrem no transporte marítimo, a gestão das operações portuárias é particularmente importante por fazer a ligação ao transporte terrestre. Aqui vamos abordar o problema da otimização das operações portuárias que integra as decisões de alocação dos navios às posições no cais e as decisões de afetação das gruas aos navios para carga/descarga. Estes dois tipos de decisões estão relacionados, pois quanto maior o tempo de carga/descarga, mais tempo estará o cais ocupado com esse navio. Por outro lado, o número de gruas é limitado pelo que é necessário decidir a que navios vão alocar-se as gruas e durante quanto tempo ficam a operar em cada navio. Este problema é ilustrado na figura 1. O custo diário associado à utilização de um navio é eleva-

do, pelo que se pretende que os navios passem o menor tempo possível nos portos.

O objetivo considerado será, portanto, o de minimizar o tempo total de permanência de um conjunto de navios nos portos.

Vamos ao longo do texto assumir as características do caso de estudo que motivou a abordagem a este problema, mais concretamente, vamos considerar o caso do porto de Aveiro aquando da ocorrência do estágio de mestrado relatado em [5] e do trabalho subsequente que deu origem ao artigo [3].

Usando este problema como motivação, expomos a importância que a teoria tem na modelação matemática para se conseguirem obter soluções, em tempo útil, para problemas práticos.

## 2. MODELO PARA O PROBLEMA DA ALOCAÇÃO DE NAVIOS E DA AFETAÇÃO DE GRUAS

Alguns aspetos práticos e de modelação menos relevantes que tornariam a apresentação do modelo mais longa, como o espaçamento entre navios e tempos de segurança para executar manobras, a impossibilidade de as gruas trocarem de posição nos carris, serão aqui ignorados. Os detalhes podem ser consultados em [3].

Para facilitar a exposição, vamos separar a apresentação do modelo nas duas componentes, a alocação de navios e o escalonamento das gruas.

### Alocação de navios

No problema de alocação de navios, a abordagem clássica consiste em considerar um diagrama espaço-tempo.

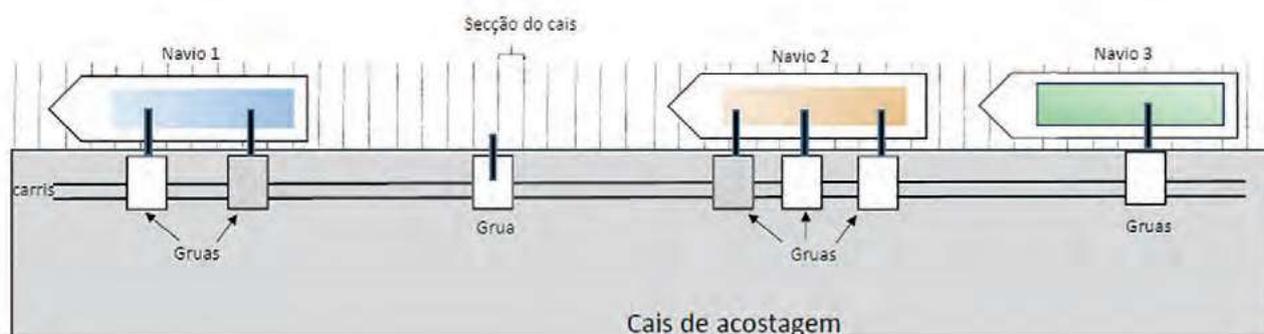


Figura 1. Exemplo das operações num cais, dividido em secções, com três navios e sete gruas (cinco de um tipo e duas de outro tipo), seis delas a operar.

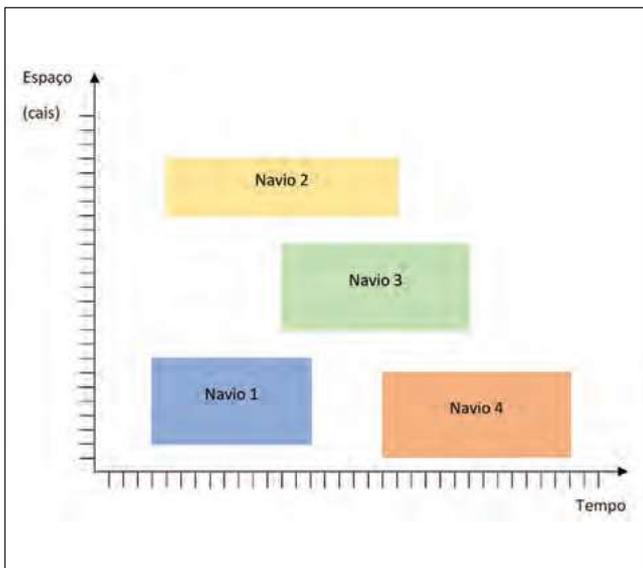


Figura 2. Exemplo da alocação de quatro navios. Os navios 1 e 4 usam algumas secções de cais em comum (há sobreposição no espaço), mas o seu serviço ocorre durante períodos disjuntos. Por outro lado, existe sobreposição temporal entre o serviço dos navios 1, 2, 3, mas estes navios foram alocados a espaços diferentes, isto é, alocados a conjuntos de secções do cais disjuntos.

O cais é dividido em  $J$  secções e o horizonte temporal é dividido em  $P$  períodos (neste caso horas), ver figura 2.

Consideremos os seguintes conjuntos:  $V = \{1, \dots, N\}$  representa o conjunto dos navios;  $T = \{0, \dots, P\}$  representa o horizonte temporal, dividido em períodos; e  $B = \{0, \dots, J\}$  representa o conjunto das secções em que se encontra dividido o cais.

Seja  $A_k$  a hora de chegada do navio  $k \in V$  ao porto, e  $H_k$  o comprimento do navio  $k \in V$  medido em número de secções do cais (arredondado à unidade superior).

Para modelar a posição relativa dos navios no diagrama espaço-tempo, vamos seguir um dos modelos mais utilizados, conhecido por *Relative Position Formulation*. Este modelo (ver [4]) considera, para cada par de navios  $k, \ell \in V$ , as variáveis binárias  $x_{k\ell}$ , que assume o valor 1 se o navio  $\ell$  é servido após o navio  $k$  ter partido e 0 caso contrário, e  $y_{k\ell}$ , que é 1 se o navio  $\ell$  é alocado, no cais, a uma posição inferior (em termos das secções representadas no conjunto  $B$ ) à do navio  $k$  e 0 caso contrário.

Para  $k \in V$  definimos adicionalmente as seguintes variáveis inteiras:  $b_k$  indica a primeira posição no cais ocupada pelo navio  $k$ ;  $t_k$  indica a hora de início do serviço ao navio  $k$ ; e  $c_k$  indica a hora a que o navio  $k$  abandona o cais.

Além das restrições que indicam o domínio das variáveis

$$x_{k\ell}, y_{k\ell} \in \{0, 1\}, b_k, t_k, c_k \in \mathbb{Z}_0^+,$$

vamos definir as seguintes restrições lineares:

$$x_{\ell k} + x_{k\ell} + y_{\ell k} + y_{k\ell} \geq 1, k, \ell \in V, k < \ell, \quad (2.1)$$

$$x_{\ell k} + x_{k\ell} \leq 1, k, \ell \in V, k < \ell, \quad (2.2)$$

$$y_{\ell k} + y_{k\ell} \leq 1, k, \ell \in V, k < \ell, \quad (2.3)$$

$$t_\ell \geq c_k + (x_{k\ell} - 1)M, k, \ell \in V, k \neq \ell, \quad (2.4)$$

$$b_k \geq b_\ell + H_\ell + (y_{k\ell} - 1)M, k, \ell \in V, k \neq \ell, \quad (2.5)$$

$$t_k \geq A_k, k \in V, \quad (2.6)$$

$$b_k \leq J - H_k, k \in V. \quad (2.7)$$

As restrições (2.1) garantem que, pelo menos, uma das quatro situações tem de ocorrer: ou o navio  $\ell$  é servido após o navio  $k$  ( $x_{\ell k} = 1$ ); ou o navio  $k$  é servido após o navio  $\ell$  ( $x_{k\ell} = 1$ ); ou o navio  $\ell$  é alocado a uma posição inferior à do navio  $k$  ( $y_{\ell k} = 1$ ); ou o navio  $k$  é alocado a uma posição inferior à do navio  $\ell$  ( $y_{k\ell} = 1$ ). Deste modo garante-se que não existe sobreposição, simultaneamente, no tempo e no espaço. As restrições (2.2), (2.3) garantem que cada par de variáveis é mutuamente exclusivo (por exemplo, se  $x_{k\ell} = 1$  então  $x_{\ell k} = 0$ ). As restrições (2.4) relacionam as variáveis de tempo associadas aos navios  $t_\ell, c_k, x_{k\ell}$ .  $M$  é uma quantidade suficientemente grande. Se  $x_{k\ell} = 1$  (o navio  $k$  é servido após o navio  $\ell$ ), então a restrição fica  $t_\ell \geq c_k$ , ou seja, a hora de início do serviço ao navio  $\ell$  tem de ser superior à hora a que o navio  $k$  abandona o cais. Se  $x_{k\ell} = 0$ , a restrição fica redundante pois  $t_\ell \geq c_k - M$  é implicada por  $t_\ell \geq 0$ , quando  $M$  é suficientemente grande. De forma análoga, as restrições (2.5) relacionam as variáveis de espaço associadas aos navios. As restrições (2.6) garantem que o navio começa a ser servido após chegar ao porto e as restrições (2.7) asseguram que o navio não excede o espaço disponível no cais ( $J$  secções).

### Escalonamento de guias

No caso prático considerado, as guias têm diferentes capacidades e estão montadas no mesmo par de carris ao longo do cais, ver figura 1, e por isso têm um raio de ação limitado. Um navio pode ser servido simultaneamente por várias guias e estas podem mudar de posição e de navio de um período para o período seguinte, isto é, uma guia pode estar a trabalhar durante uma hora num navio e na hora seguinte estar a trabalhar noutro navio.

Seja  $G = \{1, \dots, R\}$  o conjunto das guias. Assumimos que uma guia  $g$  pode ser afeta a um navio se o na-

vio está acostado no intervalo de alcance da grua. Esse intervalo é representado, em termos de secções do cais, por  $[S_g, E_g]$ . Consideremos adicionalmente os seguintes parâmetros:  $Q_k$  representa o volume de carga a operar no navio  $k \in V$ ;  $P_g$  representa a taxa de processamento da grua  $g \in G$  por período. Vamos igualmente considerar para cada  $g \in G, k \in V, j \in T$  as seguintes variáveis binárias:  $z_{gk}^j$  é 1 se a grua  $g$  está afeta ao navio  $k$  no período  $j$  e 0 caso contrário.

O conjunto de restrições lineares é o seguinte:

$$\sum_{k \in V} z_{gk}^j \leq 1, j \in T, g \in G, \quad (2.8)$$

$$\sum_{j \in T} \sum_{g \in G} P_g z_{gk}^j \geq Q_k, k \in V, \quad (2.9)$$

$$t_k \leq j z_{gk}^j + (1 - z_{gk}^j) M, j \in T, k \in V, g \in G, \quad (2.10)$$

$$c_k \geq (j + 1) z_{gk}^j, \forall j \in T, k \in V, g \in G, \quad (2.11)$$

$$b_k + H_k \leq E_g z_{gk}^j + (1 - z_{gk}^j) M, j \in T, k \in V, g \in G, \quad (2.12)$$

$$b_k \geq S_g z_{gk}^j, j \in T, k \in V, g \in G. \quad (2.13)$$

As restrições (2.8) asseguram que em cada período cada grua opera, no máximo, um navio. As restrições (2.9) garantem que as gruas afetas ao navio  $k$  são suficientes para operar toda a carga do navio. As restrições (2.10) são redundantes se  $z_{gk}^j = 0$  e tornam-se activas quando  $z_{gk}^j = 1$ , garantindo que se a grua  $g$  foi afeta ao navio  $k$  no período  $j$ , isto é, se  $z_{gk}^j = 1$ , então a hora de início do serviço desse navio tem de ser anterior ou igual a  $j$ . As restrições (2.11) asseguram que se uma grua estava a operar o navio  $k$  no período  $j$ , então este navio apenas pode sair do cais no período  $j + 1$  ( $c_k \geq j + 1$ ). As restrições (2.12) e (2.13) asseguram que uma grua pode ser afeta a um navio se e só se esse navio está no alcance da grua.

A função objetivo consiste na minimização da soma das horas de partida de todos os navios:

$$\min \sum_{k \in V} c_k.$$

### 3. QUANDO A TEORIA ENTRA EM AÇÃO

O modelo de programação linear inteira apresentado na secção anterior pode ser resolvido usando métodos exactos como o *branch-and-bound* cujo objetivo consiste em, iterativamente, particionar o conjunto inicial das soluções admissíveis em subconjuntos, gerando uma árvore de enumeração, em que cada nó da árvore corresponde a um subproblema associado a um dos subconjuntos. A eficiência

deste tipo de métodos depende essencialmente da sua relaxação linear (modelo de programação linear obtido por remoção das restrições que obrigam as variáveis a ser binárias ou inteiras) pois em cada nó da árvore é resolvida a relaxação linear do correspondente subproblema. A dimensão da árvore depende da qualidade do minorante que se obtém ao resolver a relaxação. Quanto melhor o minorante menor vai ser a árvore de enumeração. Por esse motivo é importante desenvolver bons modelos que sejam capazes de fornecer bons minorantes.

Vamos aqui introduzir duas melhorias no modelo anterior que, como veremos posteriormente, têm impacto significativo na resolução do problema.

#### Modelo discretizado

O modelo apresentado na secção 2 é dos mais utilizados na literatura, contudo, do ponto de vista teórico é um modelo fraco, pois inclui as restrições (2.4) e (2.5) que são restrições de ligação de variáveis inteiras (ou em geral contínuas) com as variáveis binárias. Estas restrições baseiam-se na ideia de considerar a restrição ativa se a variável binária for 1, mas tornam a restrição redundante se a variável binária for 0, daí usar-se, por exemplo, em (2.4) um  $M$  elevado. Por esse motivo são também designadas por restrições de *big-M*. Ora, ao realizarmos a relaxação linear de um modelo deste tipo, as variáveis  $x$  e  $y$  deixam de ser binárias e passam a pertencer ao intervalo  $[0,1]$ . Neste caso é fácil de ver que se considerarmos, por exemplo, a solução fracionária  $x_{\ell k} = x_{k\ell} = y_{\ell k} = y_{k\ell} = 1/4$ , as restrições (2.1), (2.2) e (2.3) são satisfeitas e as restrições (2.4) e (2.5) passarão a ser redundantes na maioria dos casos, ou seja, num modelo linear estamos essencialmente a remover a ligação entre as variáveis binárias de alocação no espaço e no tempo e as variáveis inteiras. Naturalmente, isso origina valores de minorantes muito baixos, próximos de zero. Uma alternativa proposta em [3] é considerar um modelo que discretiza o tempo e o espaço. Vamos apresentar apenas o caso da discretização do tempo, pois a discretização do espaço é análoga.

Consideremos as seguintes variáveis para todo o  $k \in V, j \in T$ :  $\alpha_k^j$  é 1 se o serviço no navio  $k$  é iniciado no período  $j$  e 0 caso contrário;  $\beta_k^j$  é 1 se o navio  $k$  está a ser servido no período  $j$  e 0 caso contrário. Assumimos que  $\alpha_k^j = \beta_k^j = 0$  quando  $k \in V, j \in T, j < A_k$ . As variáveis  $t_k$  podem agora ser relacionadas com as variáveis  $\alpha_k^j$  da seguinte forma:

$$t_k = \sum_{j \in T} j \alpha_k^j, k \in V.$$

O conjunto das desigualdades lineares é o seguinte:

$$c_k \geq (j+1)\beta_k^j, k \in V, j \in T, \quad (3.1)$$

$$\sum_{j \in T} \alpha_k^j = 1, k \in V, \quad (3.2)$$

$$\alpha_k^j \geq \beta_k^j - \beta_k^{j-1}, k \in V, j \in T, j > 1, \quad (3.3)$$

$$\alpha_k^1 \geq \beta_k^1, k \in V, \quad (3.4)$$

$$\alpha_k^j \leq \beta_k^j, k \in V, j \in T, \quad (3.5)$$

$$\alpha_k^j \leq 1 - \beta_k^{j-1}, k \in V, j \in T, j > 1, \quad (3.6)$$

$$x_{k\ell} + \beta_k^j + \beta_\ell^i \leq 2, k, \ell \in V, k \neq \ell, j, i \in T, i \geq j. \quad (3.7)$$

As restrições (3.1) asseguram que se o navio  $k$  está a ser servido no período  $j$ , então a hora de partida é, pelo menos,  $j+1$ . As restrições (3.2) asseguram que o navio  $k$  inicia o serviço durante o horizonte temporal. As restrições (3.3) forçam as variáveis  $\alpha_k^j$  a ser, pelo menos, 1 se  $\beta_k^j = 1$  e  $\beta_k^{j-1} = 0$ , portanto, se o navio está a ser servido em  $j$  mas não estava a ser servido em  $j-1$  se  $j > 1$  enquanto as restrições (3.4) modelam o caso  $j = 1$ . As restrições (3.5) e (3.6) majoram o valor de  $\alpha_k^j$ , obrigando esta variável a ser 0 caso o navio não esteja a ser servido em  $j$  ( $\beta_k^j = 0$ ) ou caso o navio esteja já a ser servido em  $j-1$  ( $\beta_k^{j-1} = 1$ ). As restrições (3.7) são ativas apenas quando  $x_{k\ell} = 1$ . Neste caso, como o navio  $k$  é servido antes do navio  $\ell$ , então se o navio  $\ell$  está a ser servido no período  $j$ , o navio  $k$  não pode ser servido no intervalo  $[j, J]$ .

O modelo clássico tem a vantagem de ter menos variáveis e restrições do que o modelo discretizado. Portanto, em princípio, resolver a sua relaxação linear será muito mais rápido do que resolver a relaxação linear do modelo discretizado, ou seja, o minorante é nesse caso mais fácil de obter.

Contudo, os minorantes obtidos pelo modelo clássico vão ser piores, isto é, inferiores aos obtidos pelo modelo discretizado gerando extensas árvores de enumeração.

### Desigualdades válidas

Outra forma de melhorar um modelo é adicionar restrições que não eliminem nenhuma solução admissível do problema, denominadas de desigualdades válidas. Vamos apresentar aqui um exemplo.

Seja  $L$  o número de tipos distintos de guias (a cada tipo de guia corresponde uma taxa de processamento) e consideremos a partição de  $G$  de acordo com o tipo de guias, ou seja,  $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_L$ . Para cada navio  $k \in V$  a restrição (2.9) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{t=1}^L P_t' \gamma_{tk} \geq Q_k$$

onde  $P_t'$  é a taxa de processamento das guias de tipo  $t$ , e a variável inteira

$$\gamma_{tk} = \sum_{g \in G_t} \sum_{j \in T} z_{gk}^j$$

representa o tempo total (em número de períodos) em que guias do tipo  $t$  estão afetadas ao navio  $k$ . No caso em estudo existem dois tipos de guias a que correspondem duas taxas de processamento, pelo que obtemos o seguinte conjunto:

$$X_K = \left\{ (\gamma_{1k}, \gamma_{2k}) \in \mathbb{Z}^2 \mid P_1 \gamma_{1k} + P_2 \gamma_{2k} \geq Q_k, \gamma_{1k}, \gamma_{2k} \geq 0 \right\}.$$

Desigualdades válidas para  $X_K$  podem ser convertidas em desigualdades válidas para o conjunto de soluções admissíveis inicial. As desigualdades válidas mais fortes são as que definem facetadas, isto é, as que definem o envolvente convexo do conjunto  $X_K$ , denotado por  $\text{conv}(X_K)$ .

Consideremos o exemplo de um navio (por isso omitiremos o índice  $k$ ) que tem de descarregar  $Q = 2800$  toneladas. Suponhamos que as taxas de processamento são  $P_1 = 250$  toneladas/hora e  $P_2 = 320$  toneladas/hora. Então  $X = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid 250\gamma_1 + 320\gamma_2 \geq 2800, \gamma_1, \gamma_2 \geq 0\}$ .

Na figura 3, a tracejado está representado um segmento da reta  $250\gamma_1 + 320\gamma_2 = 2800$ , e a azul está representado  $\text{conv}(X)$  incluindo as três facetadas não triviais definidas pelas desigualdades:  $\gamma_1 + 2\gamma_2 \geq 12$ ,  $7\gamma_1 + 9\gamma_2 \geq 79$  e  $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 9$ .

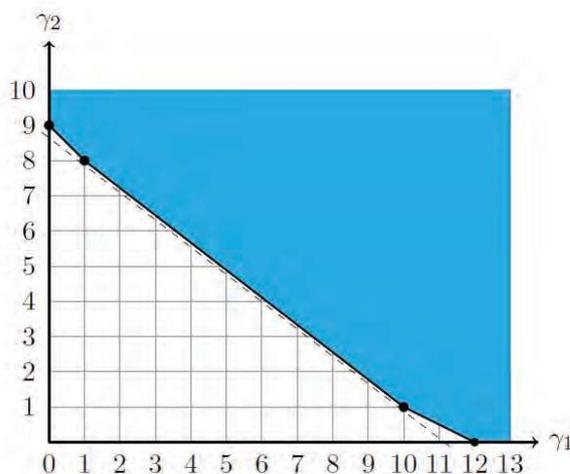


Figura 3. Facetas de  $\text{conv}(\{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid 250\gamma_1 + 320\gamma_2 \geq 2800\})$ .

#### 4. CASO PRÁTICO: PORTO DE AVEIRO

O problema da alocação de navios que motivou o estudo aqui relatado, descrito em [5], baseou-se no terminal norte, que era o principal terminal polivalente do porto de Aveiro, com 900 metros de comprimento e sete gruas. O cais foi dividido em secções de 25 metros, originando assim um total de 36 secções. As cargas e os comprimentos dos navios considerados foram reais, mas os tempos entre chegadas ao porto foram encurtados de modo a tornar o problema mais difícil (o problema torna-se mais difícil quanto maior a congestão de navios no porto, portanto, quanto mais perto uns dos outros os navios chegarem), pois a previsão era a de que a atividade portuária iria aumentar no futuro. Foram assim criados nove casos de estudo (instâncias) com um número de navios a variar de sete até 15 e um horizonte temporal a variar de 50 até 65 horas.

Para estes nove casos, a diferença do valor dos minorantes obtidos usando as relaxações lineares dos dois modelos foi enorme. Essa diferença é usualmente medida pelo

$$Gap = 100 * \frac{Opt - m}{Opt},$$

onde  $Opt$  representa o valor ótimo, e  $m$  representa o valor do minorante. Em média o  $Gap$  foi de 96,3% no caso do modelo clássico e de apenas 8,4% no caso do modelo discretizado incluindo desigualdades válidas (algumas não discutidas aqui). Utilizando o *software* de otimização Xpress-IVE, com base no modelo clássico, não foi possível resolver até à otimalidade nenhuma das instâncias no tempo limite de uma hora. Contudo, com o modelo discretizado e adicionando desigualdades válidas, foi possível resolver todas as instâncias até à otimalidade, cinco

delas em menos de um minuto e em apenas uma foi necessário usar um pouco mais de dez minutos.

Mesmo usando bons modelos, as abordagens exatas para problemas NP-difíceis têm uma aplicação limitada a problemas reais de dimensões reduzidas, pois são abordagens cujo tempo computacional pode crescer exponencialmente com a dimensão do tamanho da instância em causa. Este é o argumento usualmente empregue por investigadores de outras áreas para justificar que se ignore abordagens baseadas na modelação matemática e se recorra a métodos computacionais heurísticos para resolver problemas práticos.

No nosso caso, para testar dimensões maiores, criou-se artificialmente (mas com base em dados reais de navios) 12 instâncias com o número de navios a variar de 15 a 40 e um horizonte temporal de 168 horas, o que origina instâncias muito maiores do que as da situação real, de modo a garantir que não fosse possível resolver todas as instâncias até à otimalidade. Para obter soluções para estas instâncias recorreu-se a uma *matheuristic*, isto é, uma técnica heurística baseada em modelos matemáticos. Quando as instâncias a resolver são de grande dimensão as *matheuristics* resolvem simplificações do modelo proposto. Para o caso em estudo, foi proposta em [3] uma técnica, denominada *rolling horizon*, que consiste em dividir o horizonte temporal em sub-horizontes e resolver sequencialmente o problema resultante em cada um desses sub-horizontes. Por vezes consideram-se sobreposições dos sub-horizontes. Relativamente aos horizontes já analisados, é usual fixar algumas ou mesmo todas as variáveis aos valores encontrados e relativamente aos horizontes futuros, é usual simplificar, por exemplo, relaxando o valor das variáveis inteiras em vez de as eliminar, ver figura 4.



Figura 4. Heurística baseada no rolamento do horizonte temporal, onde numa parte (representada a azul) algumas variáveis são fixas, noutra parte (representada a verde) o modelo fica intacto, e na parte restante (representada a amarelo) o modelo é simplificado, por exemplo, relaxando todas as variáveis.

A *matheuristic* obteve soluções (não necessariamente ótimas) em menos de 10,5 minutos para todas as 12 instâncias e, nos cinco casos em que a solução ótima é conhecida, a heurística obteve essa solução. No caso da alocação de navios, este tipo de heurísticas produz usualmente boas soluções porque, frequentemente, as decisões de alocação de um navio dificilmente têm implicações nas decisões de alocação de outro navio que chega muitos períodos após o primeiro.

## 5. COMENTÁRIOS FINAIS

Com este texto pretendemos mostrar uma área em expansão onde a matemática pode desempenhar um papel importante. Além das vantagens financeiras associadas à eficiência no transporte marítimo, convém lembrar que o transporte marítimo desempenha um papel ambiental importante, por ser ainda considerado uma das formas mais ecológicas de transporte, e desempenha um papel social, pois muitas economias dependem quase exclusivamente desta forma de transporte.

Com o problema apresentado pretendemos mostrar a relevância do estudo teórico e o impacto que esse estudo tem na resolução do problema prático. Foi também apresentado um exemplo de uma *matheuristic* para gerar soluções para problemas mais complexos. As *matheuristics* são relativamente recentes, têm tido maior visibilidade ao longo da última década, e vieram permitir que matemáticos sem grande experiência computacional desenvolvam, com alguma facilidade, soluções de boa qualidade para problemas práticos complexos, usando essencialmente modelos matemáticos e um *software* de otimização.

A título mais informal, dois comentários impõem-se relativamente à ligação de abordagens matemáticas a este tipo de problemas de otimização. Do lado científico, é por vezes complicado passar a mensagem da necessidade de analisar os modelos matemáticos junto dos investigadores que usualmente trabalham nos respetivos problemas práticos, e que frequentemente recorrem a abordagens computacionais. Do ponto de vista prático, embora, tal como se mostrou, seja razoavelmente fácil a um matemático implementar soluções para problemas complexos, a incorporação destas técnicas de otimização nas empresas nem sempre é fácil. Por exemplo, há muitas vezes a necessidade de interligar os algoritmos de otimização com os sistemas de informação da empresa. Outra dificuldade prende-se com o recurso a *software* eficiente de otimização para resolver problemas de programação linear inteira. Usualmente este *software* é bastante dispendioso e as ver-

sões mais acessíveis, como o Excel Solver, têm ainda algumas limitações que podem reduzir o impacto das abordagens matemáticas.

## REFERÊNCIAS

- [1] Agra, A., Christiansen, M., Delgado A., "Mixed integer formulations for a short sea fuel oil distribution problem". *Transportation Science*, 47, 108-124, 2013.
- [2] Agra, A., Christiansen, M., Ivarsøy, K.S., Solhaug, I.E., Tomasgard, A., "Combined ship routing and inventory management in the salmon farming industry." *Annals of Operations Research* 253, 799-823, 2017.
- [3] Agra, A., Oliveira M., "MIP approaches for the integrated berth allocation and quay crane assignment and scheduling problem." *European Journal of Operational Research* 264, 138-148, 2018.
- [4] Guan, Y., Cheung R. K., "The berth allocation problem: models and solution methods." *OR Spectrum*, 26, 75-92, 2004.
- [5] Oliveira, M. S., "Porto de Aveiro: Modelos de afetação de recursos aos navios." Tese de Mestrado. Universidade de Aveiro, <http://hdl.handle.net/10773/16797>, 2014.
- [6] UNCTAD. "Review of maritime transport, 2020." United Nations. New York and Geneva, 2020.

**Agostinho Agra** tem doutoramento em Estatística e Investigação Operacional (especialização em Investigação Operacional) pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É Professor Associado com Agregação no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro. Trabalha em modelos matemáticos de otimização e problemas práticos de Investigação Operacional.

Secção coordenada pela PT-MATHS-IN, Rede Portuguesa de Matemática para a Indústria e Inovação

[pt-maths-in@spm.pt](mailto:pt-maths-in@spm.pt)