

A beleza matemática das conchas marinhas

Jorge Picado

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra

Resumo: Muitos aspectos do crescimento de animais e plantas, apesar de, pelas suas formas elaboradas, parecerem governados por regras muito complexas, podem ser descritos por leis matemáticas muito simples. Um exemplo claro disso são as conchas e os búzios marinhos, como aqui ilustramos: consegue-se, com um modelo muito simples, descrever e gerar facilmente qualquer um dos muitos tipos de conchas das classes dos Gastrópodes, Bivalves, Cefalópodes e Escafópodes que se podem encontrar classificados nas enciclopédias de conchas.

«A beleza é o brilho do ideal no reino do visível.»

Platão

«Há uma grande beleza nas pistas que a natureza nos oferece e todos nós a podemos reconhecer sem nenhum treino matemático. Também existe beleza nos enredos matemáticos que emanam dessas pistas e de onde se deduzem as regras e regularidades subjacentes, mas é um tipo de beleza diferente, mais aplicado a ideias do que a coisas. A matemática está para a natureza como Sherlock Holmes está para os indícios.»

I. Stewart [6]

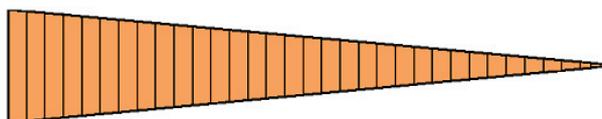
1. Como crescem as conchas

A ideia de que a matemática se encontra profundamente implicada nas formas naturais remonta aos gregos. Muitos aspectos do crescimento de animais e plantas, apesar de, pelas suas formas elaboradas, parecerem governados

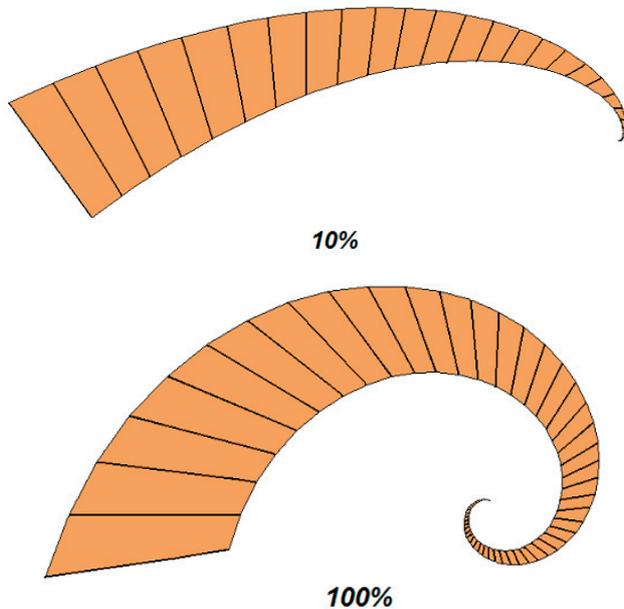
por regras muito complexas, podem ser descritos por leis matemáticas muito simples (cf., por exemplo, o livro clássico de D'Arcy Thompson [7] e o recente livro de Stephen Wolfram [8]).

Um exemplo claro disso são as conchas e os búzios marinhos [4]. Porque é que tantas conchas formam espirais? Quando o bicho que vive numa concha cresce, é necessário que a concha onde vive também cresça, para o acomodar. O facto do animal, que vive na extremidade aberta da concha, segregar e depositar o material novo sempre nessa extremidade, e mais rapidamente num lado que no outro, faz com que a concha cresça em espiral. O ritmo de segregação de material novo em diferentes pontos da concha presume-se que seja determinado pela anatomia do animal. Surpreendentemente, mesmo variações muito pequenas nesses ritmos pode ter efeitos tremendos na forma final da concha, o que está na origem da existência de muitos tipos diferentes de conchas.

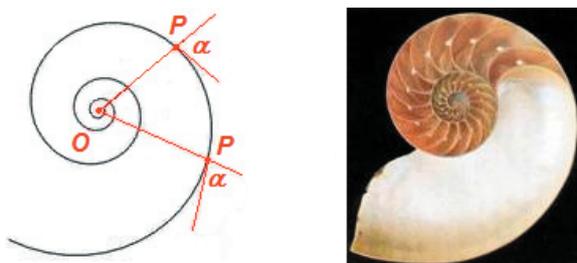
Uma versão bidimensional deste facto pode ser observado no crescimento dos cornos dos animais. Tal como as unhas e o cabelo, um corno cresce devido ao depósito de material novo na sua base. De modo a ser uma estrutura perfeitamente rectilínea, a quantidade de material depositada deve ser exactamente a mesma de cada lado da base:



No entanto, se existir alguma diferença (indicada na figura seguinte, em termos percentuais), um dos lados do corno ficará mais comprido que o outro e, inevitavelmente, o corno terá que torcer para o lado onde é depositado menos material, seguindo uma espiral:



Essencialmente, é uma versão tridimensional deste fenómeno que conduz às estruturas em espiral das conchas dos moluscos. Além disso, as conchas crescem mantendo sempre a mesma forma. Estas condicionantes juntas têm uma consequência matemática: quase todas as conchas seguem um modelo de crescimento baseado numa *espiral equiangular* (também chamada *espiral logarítmica*):

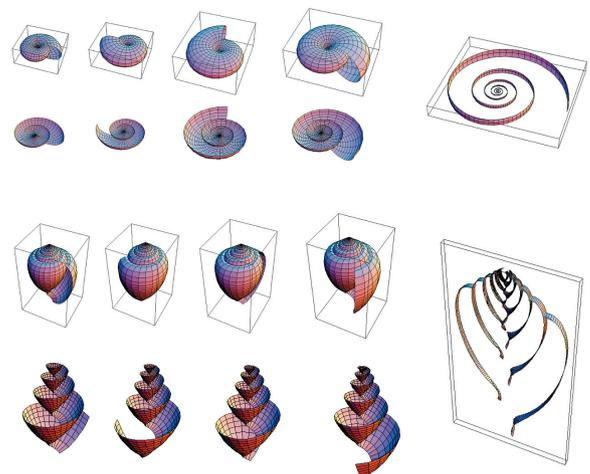


Como indicado na figura acima, dado um ponto O, a espiral equiangular é uma curva tal que a amplitude α do ângulo formado pela tangente, em qualquer dos seus pontos P, com a recta OP é constante. Jacob Bernoulli (1654-1705) chamou a esta curva a *Spira mirabilis* (*espiral*

maravilhosa), cuja expressão analítica é dada, em termos das coordenadas polares r e θ , por $r(\theta) = R e^{\theta \cot \alpha}$ onde R é o raio associado a $\theta=0$.

Se a amplitude α for 90° , a espiral equiangular é uma circunferência. É claro que o bicho não ficaria muito satisfeito com uma concha circular, porque esta não o deixaria crescer mais. O ângulo não sendo recto permite que a espiral cresça, o que corresponderá a um alargamento da concha. Este crescimento mantém sempre a forma da concha e chama-se *gnomónico*. Em geometria, o *gnómon* (palavra de raiz grega que significa "o que indica" ou "que dá a saber") de uma figura dada é uma segunda figura que, acrescentada ou retirada à primeira, gera uma terceira figura semelhante à original. Este padrão de crescimento é tão comum que é por muitos chamado de "lei da natureza".

Em resumo, o molusco não alarga a sua concha de modo uniforme: adiciona somente material numa das extremidades da concha (a extremidade aberta ou "de crescimento"); e fá-lo de maneira a que a nova concha seja sempre um modelo exacto, à escala, da concha mais pequena. A figura seguinte mostra dois dos casos que podem acontecer. O primeiro exemplo é típico da concha dos náutilos e o segundo de um cone. Em cada caso, o material novo da concha é progressivamente acrescentado na abertura da concha.



À direita, as secções horizontal (no caso do náutilo) e vertical (no caso do cone) mostram a respectiva espiral de crescimento.

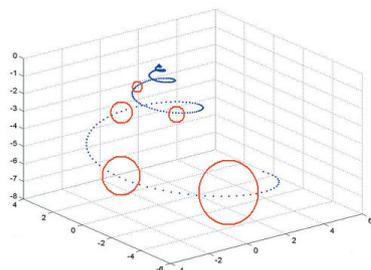
Como veremos, as conchas, com a sua forma auto-semelhante, podem ser representadas por superfícies tridimensionais, geradas por uma fórmula relativamente simples, com alguns parâmetros livres. Maravilhosamente, apesar da simplicidade dessas equações, é possível gerar uma grande variedade de tipos diferentes de conchas. Quais? Todos eles! (com muito poucas exceções: algumas espécies vivas e fósseis de *Vermicularia* e amonitas fósseis do género *Didymoceras*.) Isto mostra como muitas das formas que surgem na natureza são simples consequência da aplicação de geometria tridimensional a regras de crescimento básicas.

« (...) a matemática é muito parecida com a poesia... o que faz um bom poema – um excelente poema – é o ter muitos pensamentos expressos em poucas palavras. Neste sentido fórmulas como $e^{\pi i} + 1 = 0$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ são poemas.»

Lipman Bers

2. O modelo

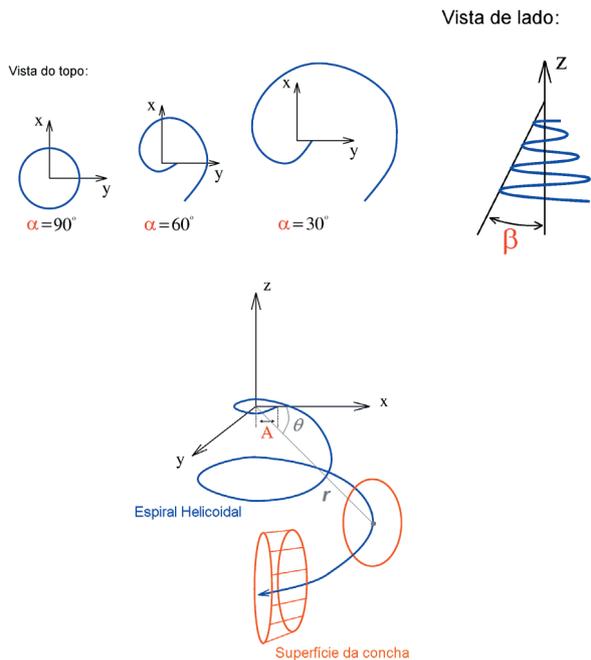
A superfície da concha é uma superfície tridimensional que pode ser vista como o resultado do deslocamento de uma curva X (a *curva geratriz*, que habitualmente é uma elipse) ao longo de uma espiral helicoidal H (a *curva estrutural*) ([1], [3]); o tamanho da curva X vai aumentando à medida que se desloca sobre H :



A forma de X descreve o perfil das secções da concha e da abertura da concha enquanto H determina a forma

global da concha. A influência de X na forma da concha é ilustrada mais adiante nos exemplos (veja também, para mais pormenores, [5]).

Para elaborar o modelo, fixemos um sistema cartesiano de coordenadas XYZ no espaço, e consideremos a helicóide descrita na forma paramétrica, em termos das coordenadas polares (r, θ) . Vista de cima, a espiral helicoidal parece uma espiral equiangular, que tem equação $r = A \sin \beta e^{\theta \cot \alpha}$, onde α denota o ângulo de abertura da espiral H , β denota o ângulo de alargamento da espiral H e A é o comprimento da abertura da espiral (isto é, a distância do seu ponto inicial ao seu centro):



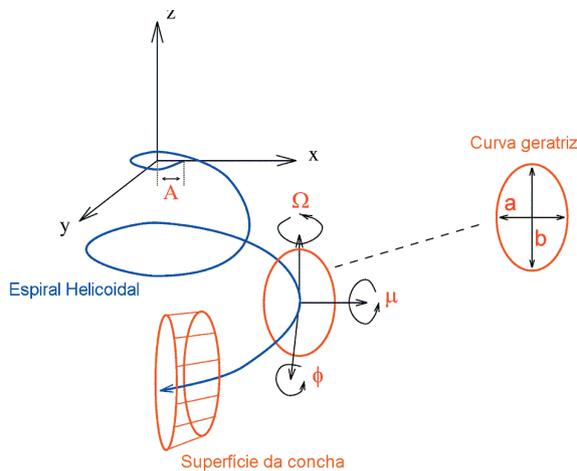
Portanto, os pontos (x, y, z) da espiral helicoidal satisfazem as equações

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta = A \sin \beta \cos \theta e^{\theta \cot \alpha} \\ y &= r \sin \theta = A \sin \beta \sin \theta e^{\theta \cot \alpha} \\ z &= -A \cos \beta e^{\theta \cot \alpha}. \end{aligned}$$

A curva geratriz, usada para gerar a forma exterior da concha, é, na maior parte dos casos, uma elipse de parâmetros a (semi-eixo maior) e b (semi-eixo menor), ou seja, uma curva de equação

$$R = \left[\left(\frac{\cos s}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sin s}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.1)$$

Admitimos ainda que esta curva possa rodar um ângulo μ , em torno do seu eixo maior, um ângulo Ω , em torno do eixo vertical, e um ângulo ϕ , em torno de um vector ortogonal ao plano da elipse, como a figura seguinte ilustra.



Juntando tudo, e entrando ainda com o sentido D do enrolamento (que pode ser positivo, 1, ou negativo, -1), obtêm-se então as equações paramétricas que permitem descrever a superfície da concha gerada por uma elipse X a deslocar-se ao longo de uma espiral helicoidal H (D. Fowler, H. Meinhardt e P. Prusinkiewicz [3], A. Cortie [1]):

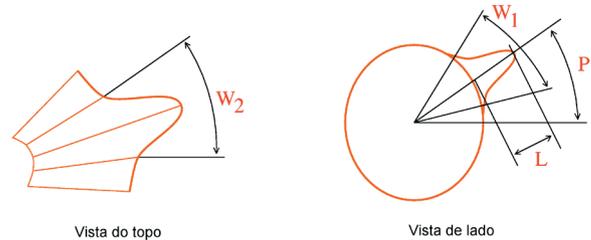
$$x = D [A \sin \beta \cos \theta + R \cos (s + \phi) \cos (\theta + \Omega) - R \sin \mu \sin (s + \phi) \sin (\theta + \Omega)] e^{\theta \cot \alpha}$$

$$y = [-A \sin \beta \sin \theta - R \cos (s + \phi) \sin (\theta + \Omega) - R \sin \mu \sin (s + \phi) \cos (\theta + \Omega)] e^{\theta \cot \alpha}$$

$$z = [-A \cos \beta + R \sin (s + \phi) \cos \mu] e^{\theta \cot \alpha}.$$

Se quisermos acrescentar nódulos, espinhos e estrias à concha, bastará considerar parâmetros N (número de nódulos existentes ao longo de uma revolução completa de θ), W_1 (comprimento do nódulo ao longo da geratriz), W_2 (comprimento do nódulo ao longo da helicóide), L (altura

do nódulo) e P (ângulo que indica a posição do nódulo na geratriz):



Bastará então substituir a equação (2.1) da elipse por

$$R = \left[\left(\frac{\cos s}{a} \right)^2 + \left(\frac{\sin s}{b} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + L e^{-\left(\frac{2(s-P)}{W_1} \right)^2 - \left(\frac{2l(\theta)}{W_2} \right)^2},$$

onde

$$l(\theta) = \frac{2\pi}{N} \left[\frac{N\theta}{2\pi} - \text{int} \left(\frac{N\theta}{2\pi} \right) \right].$$

No total, as equações da superfície da concha dependerão de 14 parâmetros:

$$D, A, \alpha, \beta, \mu, \Omega, \phi, \alpha, \beta, L, P, W_1, W_2, N.$$

«A Matemática possui não só verdade, mas também beleza suprema – uma beleza fria e austera, como a da escultura, sem apelar a qualquer parte mais fraca da nossa natureza... sublimemente pura, e capaz da perfeição sem compromissos que só a grande arte pode atingir.»

Bertrand Russell

3. Exemplos

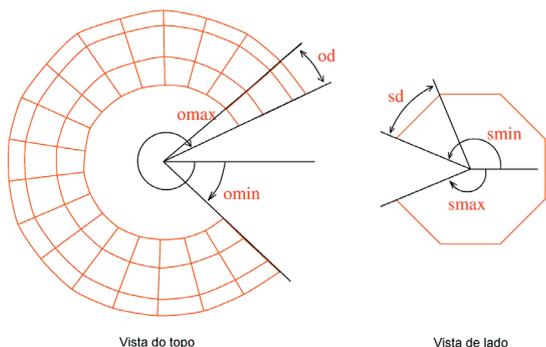
A escrita das equações no programa **Mathematica** pode ser feita do seguinte modo:

```

1[n_][theta_]=(2Pi/n)((n theta/2Pi)-IntegerPart[n theta/2Pi]);
h[a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][s_,theta_]=(1/Sqrt[(Cos[s]/a)^2+(Sin[s]/b)^2])
+11 Exp[-(2(s-p)/w1)^2-(2l[n][theta]/w2)^2];
x[d_,aa_,beta_,phi_,omega_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
d(aa Sin[beta]Cos[theta]+h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]
(Cos[s+phi]Cos[theta+omega]-Sin[mu]Sin[s+phi]Sin[theta+omega]))
Exp[theta Cot[alpha]];
y[aa_,beta_,phi_,omega_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
(-aa Sin[beta] Sin[theta]-h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]
(Cos[s+phi]Sin[theta+omega]-Sin[mu]Sin[s+phi]Cos[theta+omega]))
Exp[theta Cot[alpha]];
z[aa_,beta_,phi_,mu_,alpha_,a_,b_,ll_,p_,w1_,w2_,n_][theta_,s_]=
(-aa Cos[beta]+h[a,b,ll,p,w1,w2,n][s,theta]Sin[s+phi]Cos[mu])
Exp[theta Cot[alpha]];

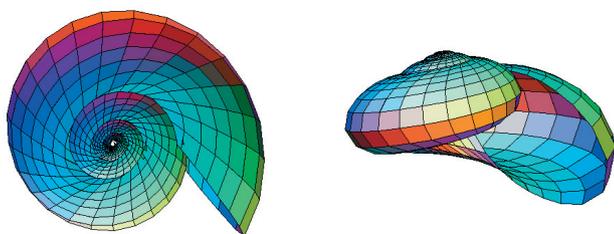
```

Escolhendo valores adequados para os diversos parâmetros e variando θ desde $omin$ até $omax$ e s de $smin$ a $smax$



podemos traçar a superfície de qualquer tipo de concha conhecido.

Por exemplo, a Náutica de orelha (cf. [2], p. 78), da classe dos Gastrópodes, pode ser gerada com os parâmetros $D=1, A=25, \alpha=83^\circ, \beta=42^\circ, \mu=10^\circ, \Omega=30^\circ, \phi=70^\circ, a=12, b=20, L=0, P=0, W_1=1, W_2=1, N=1$:

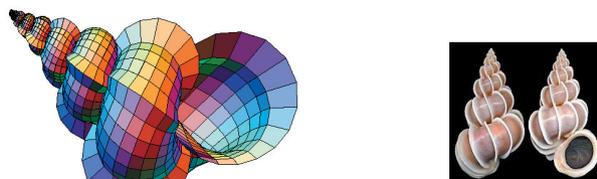


```
With[{d=1,aa=25,beta=42Degree,phi=70Degree,omega=30Degree,mu=10Degree,
alpha=83Degree,a=12,b=20,ll=0,p=0,w1=1,w2=1,n=1},
ParametricPlot3D[{x[d,aa,beta,phi,omega,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s],
y[aa,beta,phi,omega,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s],
z[aa,beta,phi,mu,alpha,a,b,ll,p,w1,w2,n][theta,s]},
{theta,-4Pi,4Pi},{s,-270Degree,90Degree},
Boxed->False,Axes->False,PlotPoints->{100,20},
PlotRange->All,ViewPoint->{-1,-3,0.5}]]
```

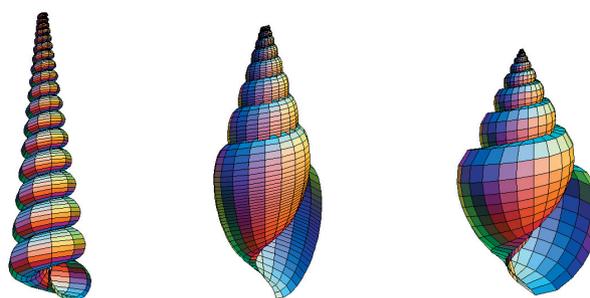
Terminamos com mais alguns exemplos de conchas que se encontram classificados em [2] e que se podem modelar deste modo (estes, e outros exemplos, podem ser manipulados interactivamente, com mais pormenor, em [5]).

O exemplo mais surpreendente é o dos bivalves, com os seus *umbos* (protuberâncias do topo) maravilhosamente traçados com toda a perfeição!

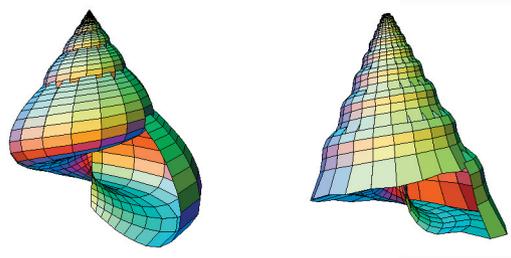
Escalária Preciosa ($D=1, A=90, \alpha=86^\circ, \beta=10^\circ, \mu=5^\circ, \Omega=1^\circ, \phi=-45^\circ, a=20, b=20, L=14, P=40, W_1=180, W_2=0.4, N=180$):



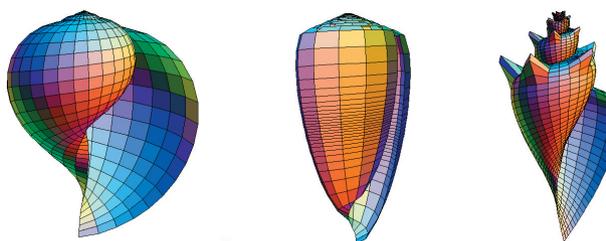
Turritela, ancilla e búzio:



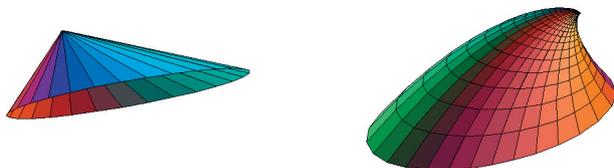
Dois troques (o troque maura tigre e o troque comercial):



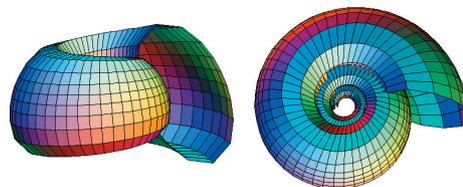
Tonel, oliva e concha cavalo:



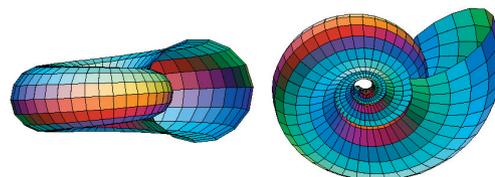
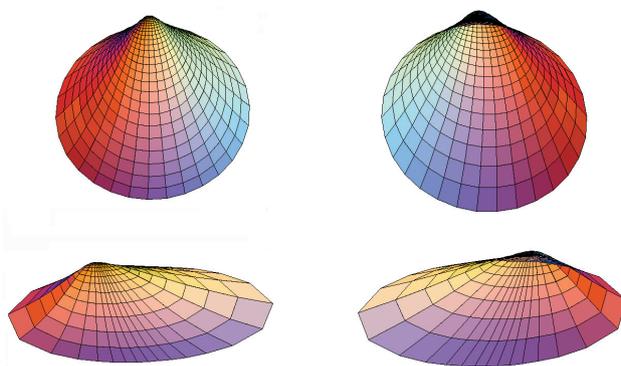
Duas lapas (a lapa comum e a lapa raiada de azul):



Planorbis e amonita (Fóssil):



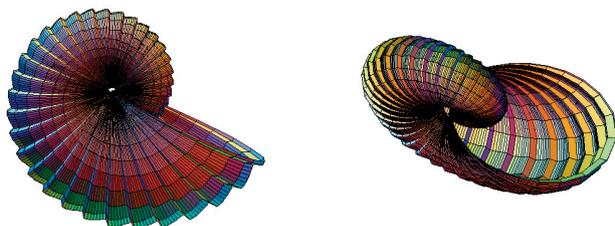
Dois bivalves (a glicimeris-europeia e a concha lyonsia):



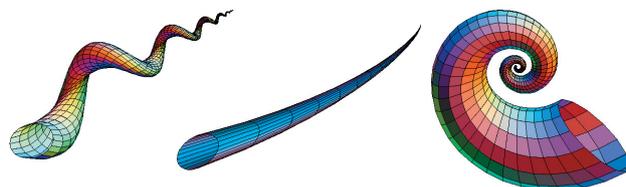
«O cientista não estuda a Natureza porque isso é útil;
estuda-a porque ele se delicia nela, e ele delicia-se nela
porque é bela. Se a Natureza não fosse bela, não valeria
a pena ser conhecida, e se a Natureza não valesse a pena
ser conhecida, a vida não valeria a pena ser vivida.»

Henri Poincaré

Argonauta (Cefalópode):



Serpentina, dente de elefante (Escafópode) e espirula:



Referências

- [1] A. Cortie, Digital seashells, Comput. & Graphics 17 (1993) 79-84.
- [2] S. P. Dance, Conchas, Bertrand Editora, 1996.
- [3] D. Fowler, H. Meinhardt e P. Prusinkiewicz, Modeling seashells, Computer Graphics 26 (1992) 379-387.
- [4] H. Meinhardt, The Algorithmic Beauty of Sea Shells, Springer Verlag, 1998.
- [5] J. Picado, Conchas marinhas: a simplicidade e beleza da sua descrição matemática, www.mat.uc.pt/~picado/conchas.
- [6] I. Stewart, Os Números da Natureza, Temas e Debates, 2003.
- [7] D'A. Thompson, On Growth and Form, Cambridge University Press, 1961.
- [8] S. Wolfram, A New Kind of Science, Wolfram Research, Inc., 2004.

CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

3001-454 COIMBRA

E-mail: picado@mat.uc.pt

URL: www.mat.uc.pt/~picado