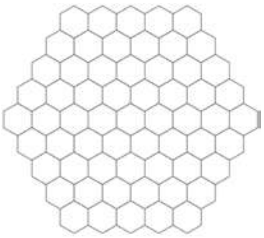
JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

PRODUTOS LÚDICOS

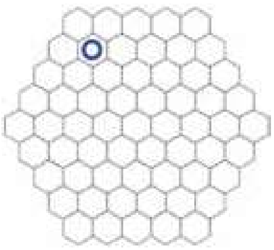
O Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos recebeu o prémio Ciência Viva Educação 2020[1]. O reconhecimento, ao fim de 15 anos, desta iniciativa, que envolve muitas dezenas de milhares de jovens todos os anos, enche-nos de orgulho. Os jogos que integram este campeonato têm variado muito, sempre dentro da categoria que se costuma designar por "jogos matemáticos" ou "jogos abstratos". Hoje, falamos um pouco sobre um deles, o Produto, para ilustrar como um jogo de tabuleiro pode servir de conduto a algumas intuições aritméticas.



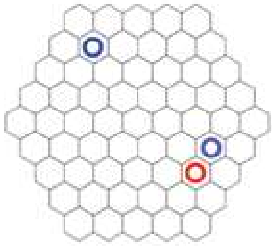
O Produto foi inventado por Nick Bentley, João Pedro Neto e Bill Taylor em 2008. O jogo, entre dois jogadores – o Azul e o Vermelho – desenrola-se num tabuleiro hexagonal com células hexagonais, como ilustrado acima.

No início, o tabuleiro encontra-se vazio. Há peças azuis e vermelhas em quantidade, disponíveis aos jogadores. Na sua vez, cada jogador deve colocar duas peças (ambas azuis, ambas vermelhas, ou uma de cada cor) em duas casas vazias. Começa o Azul. No primeiro lance, o Azul joga apenas uma peça (de qualquer cor). Note-se esta regra pouco usual: cada jogador poder introduzir peças da sua cor ou da cor do adversário.

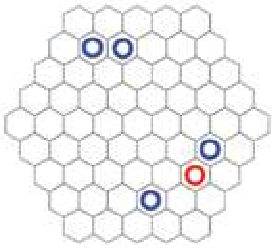
Vejamos um exemplo de como uma partida poderia começar.



O Azul deve introduzir uma peça (de qualquer cor). Optou por introduzir uma peça da sua cor, azul.



O Vermelho introduz duas peças. Decidiu introduzir uma azul e uma vermelha.

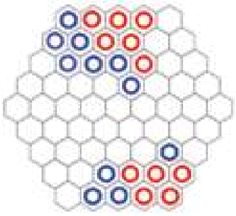


O Azul introduz duas peças. Optou por duas azuis.

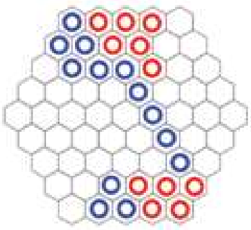
[1] *https://www.cienciaviva.pt/semanact/campeonato.php*

Quando o tabuleiro estiver cheio, calcula-se o produto dos tamanhos dos dois maiores grupos de cada cor (quem tiver menos de dois grupos obtém o valor zero). Ganha quem obtiver o maior produto. Se estes forem iguais, ganha quem tiver menos peças da sua cor no tabuleiro.

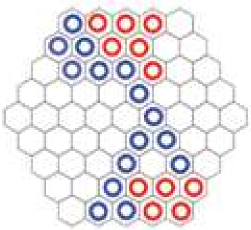
Vejamos um exemplo de uma fase mais adiantada de uma partida:



No diagrama, a contagem atual é de 21 pontos para o Azul (sete peças no grupo maior vezes três peças no seu segundo grupo), tendo o Vermelho 30 pontos. Se o Azul jogasse como ilustrado abaixo, com a ideia de aumentar o seu grupo maior...



...o Vermelho poderia responder colocando duas peças azuis, criando assim um grande grupo azul. O Azul teria agora dificuldade em criar um segundo grupo isolado, com uma dimensão suficiente para ganhar ao produto final do Vermelho (relembremos que se o Azul terminar a partida com um grupo único, a sua pontuação será nula):



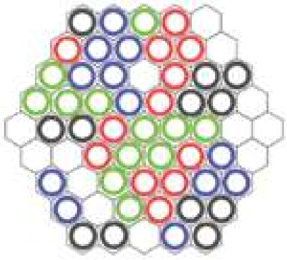
Na prática deste jogo, muitos principiantes, tendo dois grupos de peças, tendem a promover o crescimento do maior. Estarão a proceder bem? Tendo n peças para dividir entre dois grupos, maximizando o produto das suas cardinalidades, como se deve proceder? Isto é, se $a+b=n$ e queremos ab o maior possível, como devemos escolher a e b? Ora, se $a<b$, temos

$$(a+1)(b-1)=ab+b-a-1\geqslant ab$$

com desigualdade estrita se $b>a+1$. Concluímos assim que a e b devem ser de magnitude semelhante. No caso de n ser par, devem igualar $n/2$.

Um caso mais delicado surge no jogo Omega, criado por Néstor Andrés em 2010[2].

Neste jogo, participam vários jogadores, digamos p jogadores (cada um com a sua cor), que, à vez, colocam p peças no tabuleiro, uma de cada cor. O tabuleiro é hexagonal de células hexagonais e dimensão conveniente. Quando o jogo acabar, ao fim da última volta completa em que todos têm lances legais, calcula-se a pontuação de cada um. Esta é dada pelo produto das cardinalidades de todos os grupos de cada jogador. Vejamos um exemplo (quatro jogadores num tabuleiro de lado 5).



As pontuações dos jogadores nesta posição são as seguintes:

	Produto	Total
Negro	$1\times2\times2\times3\times4$	48
Azul	$1\times2\times3\times6$	36
Verde	$1\times4\times7$	28
Vermelho	$1\times2\times4\times5$	40

Que estratégia devem seguir os jogadores quanto às dimensões dos seus grupos? E quanto às dos grupos dos adversários?

Respostas às questões do número anterior:
Tem-se $P^3(n)=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}$ e, em geral, $P^d(n)=\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k}$.

[2] https://www.nestorgames.com/#omega_detail