



JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

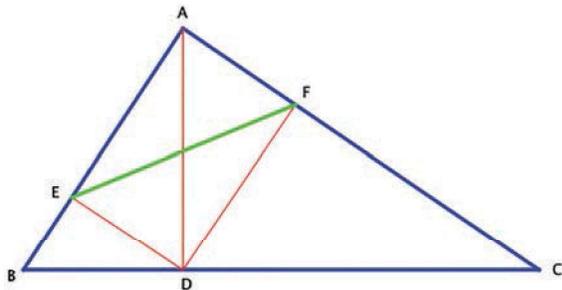
MAIS PROBLEMAS DO REINO UNIDO

A nossa última coluna foi inspirada num livro de problemas recente, *The Ultimate Mathematical Challenge* (Harper Collins 2018), editado por The UK Mathematics Trust (UKMT). Além de ainda andarmos maravilhados com a obra, essa coluna motivou invulgar participação dos seus leitores, o que muito nos alegrou. Assim, continuamos hoje com mais algumas questões dessa interessantíssima coleção.

Como a compilação de problemas é vasta, variamos nos temas abordados.

A nossa escolha caiu hoje sobre um problema de geometria, dois de combinatória e outro sobre números.

INVARIÂNCIA: Dado um triângulo acutângulo ABC , baixando uma altura, encontramos um ponto D na base do triângulo. Por D tracemos perpendiculares sobre os outros dois lados, obtendo assim os pontos E e F . Mostre que o comprimento do segmento EF independe do vértice a partir do qual se traçou a altura.



DANÇA DAS CADEIRAS: Há n cadeiras à volta de uma mesa redonda. Há n pessoas que vão chegar consecutivamente e sentar-se. A primeira escolhe o seu lugar como quiser. A partir daqui, para $1 \leq k \leq n - 1$, a $(k + 1)$ -ésima pessoa senta-se k lugares à direita da k -ésima pessoa. Para que valores de n é que este procedimento funciona sem constrangimentos?



MUITOS RESTOS: a Laura divide 365 sucessivamente por 1, 2, 3, ..., 365 e soma todos os restos. O Manuel, por sua vez, divide 366 por 1, 2, 3, ..., 366 e soma todos os restos obtidos. Quem conseguiu soma maior?

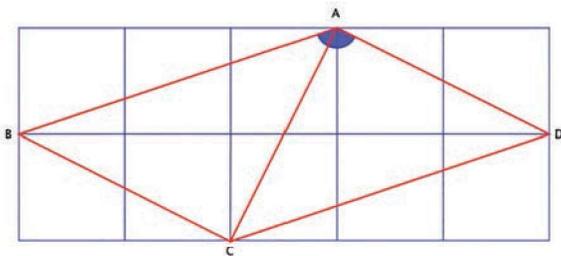
DESCOBRIR A COMBINAÇÃO: Um aloquete de código usa uma combinação de três dígitos de 0 a 9. Sempre que, quando se faz uma tentativa que tem, pelo menos, um dígito certo (no lugar certo), o aloquete, que fala, diz "Quente!". Se a tentativa não contiver nenhum dígito correto (na posição certa), o cadeado grita "Frio!". Por exemplo, se a combinação correta for 014, as tentativas 099 e 014 originam ambas a resposta "Quente!", enquanto que a tentativa 140 obtém um grito de "Frio!".



De quantas tentativas se precisa para ter a certeza de descobrir a combinação correta, qualquer que ela seja?

Sobre as questões do número anterior:

QUANTO MEDE ESTE ÂNGULO? Estendamos a figura de acordo com a ilustração abaixo.

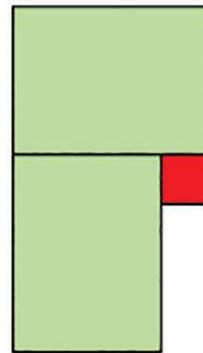


O triângulo ACD é isósceles e retângulo, portanto $\angle ADC = 45^\circ$. Temos então, notando que $ABCD$ é um paralelogramo, $2\angle BAD = 360 - 90$, donde $\angle BAD = 135^\circ$.

QUANTA GENTE? Quando a Laura entrou num dado bar, onde estavam já algumas pessoas, a idade média subiu 4 anos. O seu irmão gémeo, o Manuel, entrou de seguida, tendo a média subido mais 3 anos. Quantas pessoas estavam inicialmente no bar? A resposta é 6, mas no enunciado faltava a menção ao parentesco entre os protagonistas. Os nossos leitores assíduos Pedrosa Santos, Luís Madureira, Manuel Araújo e Adérito Araújo tiveram a gentileza de nos alertar para esse lapso.

SÓ INTEIROS? É fácil constatar que $x_1 = 2$ e $x_{n+1} > \frac{3}{2}(x_n)$ para $n > 2$, portanto a sucessão é crescente. Como o nosso leitor Luís Madureira notou, tem-se, para $n > 1$, $x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$, donde se conclui que os valores são todos inteiros.

QUE PERCENTAGEM? Basta calcular a percentagem a que corresponde o quadrado na configuração abaixo, que pode ser considerada geradora da pavimentação.



Um cálculo simples mostra que a peça tem área 100 e o quadrado tem área 4, portanto a percentagem é 4%.



Visite-nos em <https://clube.spm.pt>

