



FABIO CHALUB  
Universidade  
Nova de Lisboa  
chalub@fct.unl.pt

## O ANO DE TODAS AS ELEIÇÕES

Em 2019, muitas eleições serão realizadas: europeias, legislativas, regionais... De todos os assuntos em que a matemática tem um papel fundamental, poucos são tão relevantes como o estudo das eleições: desde como desenhar o mapa do país, escolher os representantes e modelar o funcionamento do legislativo. Veremos aqui uma pequena amostra destes estudos.

Há tantos modelos eleitorais quanto países. Mesmo entre os países consensualmente considerados democráticos, os modelos são muito distintos. A razão é simples: não há nenhuma forma de eleger um governo que tenha todas as características desejáveis. A situação é a de um cobertor curto: quando se cobre a cabeça, os pés ficam de fora.

Vamos então construir uma democracia representativa a partir do nada, e apresentar a ementa de opções. Em cada passo, como veremos, a matemática terá um papel fundamental: não para dizer o que deve ser feito, mas quais as consequências expectáveis de cada opção. A decisão final – ou seja, a escolha do modelo exato – será eminentemente política.

Começamos por dividir o país em círculos eleitorais. Pode até mesmo ser apenas um, como é feito na eleição para Presidente ou nas eleições para o Parlamento Europeu. No entanto, o mais comum é o país ser dividido em diversos círculos, ver figura 1. A primeira pergunta que devemos fazer é: devem os círculos ser construídos de forma mais ou menos arbitrária, de modo a terem todos aproximadamente o mesmo tamanho, ou devem corresponder a divisões já existentes, baseadas na História das populações envolvidas ou na geografia da região?

No primeiro caso, que ocorre nas eleições parlamentares norte-americanas, inglesas e francesas, são desenhados círculos que elegem apenas um representante. Desta forma, é necessário que estes sejam equilibrados em relação

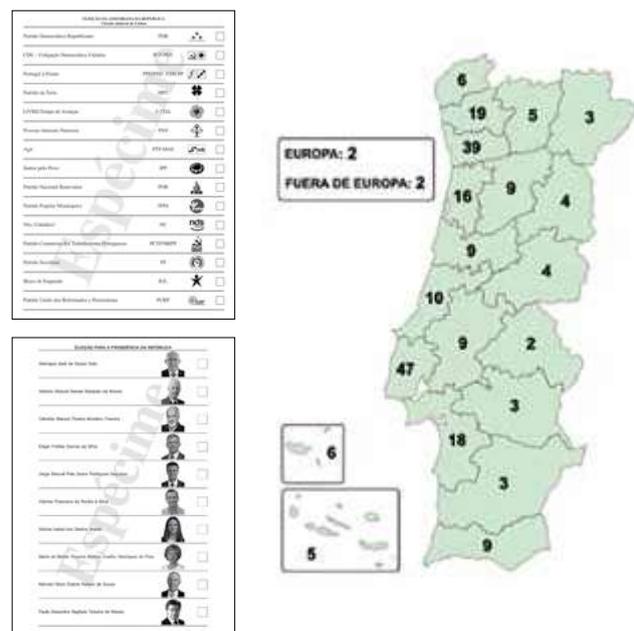


Figura 1. À esquerda, em cima: O boletim de voto para Presidente da República: há apenas um círculo (o país), elege-se apenas o vencedor, definido em sistema de duas voltas, com maioria simples na segunda volta. À esquerda, em baixo: boletim para a Assembleia da República. **Fonte:** Comissão Nacional de Eleições. À direita, divide-se o país em vários círculos eleitorais, cada um elege um certo número de representantes. **Fonte:** Wikimedia Commons. O voto é numa lista ordenada de nomes, referida pelo nome de um partido político, ou um nome inventado com este propósito específico. Elegem-se os primeiros e cada lista, de acordo com o número de assentos atribuídos ao distrito e utilizando o método de d'Hondt.

ao número de eleitores registados ou mesmo em relação à população. Como estes mudam periodicamente, é necessário, de tempo em tempos, proceder à reorganização dos distritos. Nos EUA, onde isto é feito por políticos, as comissões partidárias que propõem os novos mapas incluem um grande número de matemáticos, que tentam maximizar a probabilidade de um certo partido ter maioria absoluta (e não necessariamente maximizar o número de eleitos). Este processo, conhecido como *Gerrymandering*, é um grave problema da democracia representativa norte-americana. Já discutimos esta questão na Gazeta 160. No Reino Unido e em França, isto é feito por órgãos técnicos independentes, que, por mais falhas que tenham, são bem considerados nos seus países.

Uma outra pergunta que tem de ser respondida é: como desenhar o processo eleitoral de forma a termos um eleito que melhor represente a vontade da população? É claro que, desta forma, a pergunta não é clara, mas mesmo assim tem que ser respondida. A opção mais utilizada é eleger quem tiver mais votos numa ronda em que todos se apresentam a votos ("maioria simples"). Caso ninguém chegue a um certo valor de corte (frequentemente 50% dos votos válidos, mas com algumas subtilezas), realiza-se uma segunda volta apenas com os mais votados. Nesta, aplica-se o conceito de maioria simples.

Vejamus de forma simples como este método pode dar resultados indesejáveis (o exemplo, assim como praticamente toda a discussão deste artigo, é adaptado de [1]). Considere um procedimento eleitoral simples, com 25 eleitores e 4 candidatos: A, B, C e D. Para cada grupo de eleitores, colocamos as suas preferências em ordem decrescente, de cima para baixo:

Tabela 1

Número de eleitores	5	7	4	3	3	3
Preferências	A	B	A	C	D	D
	C	D	D	D	C	C
	D	A	C	B	A	B
	B	C	B	A	B	A

Note que, numa eleição por maioria simples, A é eleito com 9 votos, contra 7 de B, 6 de D e 3 de C. Numa possível segunda volta, A perderia para B por 12 a 13. O mais interessante, no entanto é outro fenómeno. Veja que se D enfrentasse isoladamente qualquer outro candidato, então seria este o preferido: 16 a 9 contra A, 18 a 7 ao enfrentar B e, finalmente 17 a 8 no combate direto com C. D é conhecido como *vencedor de Condorcet*, em homenagem ao

matemático que primeiro percebeu esta situação, ao estudar os sistemas eleitorais vindos da Revolução Francesa, o início de uma ideia simples: um homem, um voto. Esta situação, que parece exótica, ocorreu em 2012 na pátria de Condorcet, onde François Bayrou ficou em quinto lugar na primeira volta, mas as sondagens indicavam que ganharia todos os possíveis segundos turnos [2]. Ver figura 2.

Um mecanismo utilizado, por exemplo, para escolher a sede olímpica ou em alguns concursos académicos, é de fazer várias iterações, onde, em cada uma, se elimina o que tiver menos votos. Neste exemplo, começa-se por eliminar C, a seguir os seus votos são transferidos integralmente para D. Elimina-se B e finalmente D é declarado o vencedor.

Em Espanha e no Brasil, os círculos eleitorais para o parlamento nacional são dados pelas unidades administrativas, inferiores ao Estado nacional, superiores aos municípios. Grosso modo, no primeiro caso, são as *províncias*, no segundo, os *estados*. Para as eleições da Assembleia da República, os círculos são os distritos (mais regiões autónomas e exterior), que não têm a autonomia dos exemplos anteriores mas existem de forma independente do processo eleitoral. Nas eleições presidenciais norte-americanas, são os estados mais o distrito de Colúmbia, caso já tratado na Gazeta 181, e não mais falaremos aqui. O ponto importante é que estes círculos têm características muito distintas, e portanto o número de eleitos por cada um deve ser diferente. A questão que se põe é: como atribuir assentos parlamentares de forma proporcional?

Esta atribuição pode ser baseada na população, nos eleitores, ou mesmo nos votantes (uma maior abstenção pode resultar num menor número de eleitos, como na Alemanha).



Figura 2. Marquês de Condorcet (1743-1794), Jean Charles Borda (1733-1799) e Victor d'Hondt (1841-1901). Três matemáticos que se dedicaram à compreensão dos problemas advindos dos processos eleitorais. Nenhuma solução é perfeitamente satisfatória. O método de Borda, utilizado em processos com poucos votantes, não foi explicado neste texto. Fonte: Wikimedia Commons.

Tabela 2

Número de assentos	1	2	3	4	5	6	7	8
Lista A	100.000	50.000	33.333	25.000	20.000	16.666	14.286	12.500
Lista B	80.000	40.000	26.666	20.000	16.000	13.333	11.428	10.000
Lista C	30.000	15.000	10.000	7.500	6.000	5.000	4.286	3.750
Lista D	20.000	10.000	6.666	5.000	4.000	3.333	2.857	2.500

Em Portugal, assim como em muitos países europeus, usa-se o *método de d'Hondt*, batizado em homenagem ao matemático e jurista belga Victor D'Hondt.

A ideia é apresentarem-se a votos listas ordenadas de candidatos; cada eleitor escolhe uma lista. O número de votos será convertido em assentos no Parlamento. Suponha, apenas para facilitar a descrição, que uma dada lista quer *comprar*  $n$  assentos utilizando como *moedas* os  $V$  votos recebidos. Assim, esta lista poderá *pagar*  $V/n$  por cada assento. A ideia é que o preço de cada lugar no Parlamento será definido de forma a que todos os assentos sejam *vendidos* pelo maior preço possível. O preço tem de ser o mesmo para todas as listas.

O exemplo abaixo foi retirado da Wikipedia [3]. Neste, quatro listas foram a votos, A, B, C e D, obtendo 100 000, 80 000, 30 000 e 20 000 votos, respetivamente, na disputa de 8 lugares. Na tabela 2, indicamos quanto estariam dispostas a pagar por  $n$  assentos.

Se cada lugar *custasse* 50 mil votos, então apenas 3 seriam *vendidos*: 2 para a lista A, um para a B. Para *vender* 8 lugares, é preciso descer o preço até 25 mil votos. O resultado será a atribuição de 4 lugares à lista A, enquanto as outras terão 3, 1 e 0 assentos parlamentares, respetivamente.

Variantes destes métodos, por vezes chamadas método de Sainte-Laguë, são utilizadas pela Alemanha (que atribui parte às eleições em lista e parte em círculos uninominais) e pela Suécia (que divide por fatores não inteiros de assentos para dificultar a entrada de partidos com poucos votos).

No Brasil, usa-se o *método dos restos*, criado pelo político norte-americano Alexander Hamilton. Este foi apenas brevemente utilizado nos EUA, por uma característica matemática que não foi notada inicialmente: um maior Parlamento (ou seja, mais cadeiras em disputa), mesmo mantido o resultado eleitoral, pode resultar num pior resultado para algumas listas. Isto ficou conhecido como *paradoxo do Alabama*, em que este estado teria uma diminuição da representação após um aumento do tamanho da *House of Representatives* [4].

Outros métodos também são utilizados, cada um com as suas vantagens e desvantagens. Nenhum é perfeito – e isto é o teorema de Balinski-Young, que fica para outro artigo.

## REFERÊNCIAS

[1] Antonio Morena Verdejo, Adela M<sup>a</sup> Villegas Escobar. *Matemáticas Electorales*. Colección Miradas Matemáticas. Los Libros de la Catarata, 2017.

[2] Rémi Peyre. "Et le vainqueur du second tour est ... Le critère de Condorcet". <https://images.math.cnrs.fr/Et-le-vainqueur-du-second-tour-est.html?lang=fr>

[3] [https://en.wikipedia.org/wiki/D%27Hondt\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/D%27Hondt_method)

[4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Appportionment\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Appportionment_paradox)

## ERRATA:

O artigo "À tous les temps, À tous les peuples" publicado na *Gazeta* n.º 187 continha alguns erros e algumas imprecisões. Para minha sorte, e também evidentemente de quantos leitores por cá houver, a *Gazeta* tem um público informado e atento: o Olivier Pellegrino, do Instituto Português da Qualidade, e a sua colega Sílvia Gentil mandaram-me um e-mail com um longo rol de pontos que merecem reparo. O mais importante de todos – e eu deveria chumbar por isto – é uma insistente confusão no texto entre peso e massa. Apesar da linguagem mais relaxada da divulgação científica, este é um erro imperdoável. O quilograma é uma medida de massa, ponto final.

Num outro momento infeliz, o artigo refere que "Em 1960, a definição de metro foi alterada para a distância entre duas riscas em uma certa barra metálica." De facto, esta definição foi introduzida em finais do séc. XIX; em 1960 ela foi substituída por um múltiplo bem definido do comprimento de onda de uma radiação específica, abandonando a definição via objeto físico.

Há mais algumas notas, como corrigir "mol" para "mole", "luminosidade" para "intensidade luminosa", acrescentar o "n" final de Boltzmann e alguns outros de cariz mais específico.

Que sorte para todos nós termos leitores como o Oliver, a quem deixo meus sinceros agradecimentos.