

## VISUALIZANDO A COMPOSTA DE ROTAÇÕES ATRAVÉS DE UM SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

GÜNHAN CAGLAYAN

NEW JERSEY CITY UNIVERSITY

gcaglayan@njcu.edu

Normalmente, o estudo que se faz em cursos de Geometria Moderna ou Álgebra Linear sobre rotações em  $\mathbb{R}^2$  baseia-se na sua descrição como composição de duas reflexões. Neste artigo pretendemos apresentar uma abordagem diferente, estudando a composição de rotações em  $\mathbb{R}^2$  sem recorrer ao uso de reflexões.

### 1. SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Para ilustrar as várias situações consideradas neste artigo, nós construímos duas *applets* num *software* de geometria dinâmica, nomeadamente no Geogebra. Uma das *applets* é sobre a composição de duas rotações. Nessa *applet* incluímos seletores que nos permitem escolher um ponto  $P$  qualquer e obter a sua imagem pela composição de duas rotações quaisquer (ver figuras 2, 3 e 4). Note-se que os seletores  $p_x$  e  $p_y$  representam as coordenadas do ponto  $P$ , isto é,  $P = (p_x, p_y)$ . Situação semelhante acontece para os centros  $A$  e  $B$  das rotações. A segunda *applet* é sobre a composta de três rotações (ver figura 5). Embora neste artigo apenas se aborde a composta de três meias-voltas, a *applet* construída permite considerar qualquer caso de composta de três rotações. Este tipo de *applets* pode ser muito útil na abordagem deste tópico e de tópicos semelhantes. Elas permitem que os alunos explorem várias situações e elaborem conjecturas, antes de as tentarem provar.

### 2. REDUÇÃO DE ROTAÇÕES A ROTAÇÕES EM TORNO DA ORIGEM.

Dado um ponto  $A \in \mathbb{R}^2$  e um ângulo  $\alpha$ , vamos denotar por  $R_{(A,\alpha)}$  a matriz associada à rotação de centro  $A$  e amplitude  $\alpha$  no sentido anti-horário, ou seja, se  $P \in \mathbb{R}^2$ , então  $R_{(A,\alpha)}P$  é a imagem de  $P$  pela rotação de centro  $A$  e amplitude  $\alpha$  no sentido anti-horário (note-se que, como é usual, estamos a identificar vetores com matrizes coluna). Logo, como exemplo,

$$R_{(O,\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

onde  $O$  denota a origem de  $\mathbb{R}^2$ . Vamos convencionar que, caso nada seja dito em contrário, sempre que nos referirmos a uma rotação, estamos a considerá-la no sentido anti-horário.

Qualquer rotação em  $\mathbb{R}^2$  pode ser reduzida à rotação centrada na origem com a mesma amplitude através de translações. A forma usual é a seguinte: se  $P_1$  for a imagem de  $P$  pela rotação de centro  $A$  e amplitude  $\alpha$ , isto é, se  $P_1 = R_{A,\alpha}P$ , então podemos obter  $P_1$

a) começando por aplicar a translação associada ao vetor  $-A$  ao ponto  $P$ , obtendo o ponto  $P - A$ ;

b) depois de aplicar a rotação de centro  $O$  e amplitude  $\alpha$  ao ponto  $P - A$ , obtendo o ponto  $R_{O,\alpha}(P - A)$ ;

c) e, finalmente, aplicar a translação associada ao vetor  $A$  ao ponto  $R_{O,\alpha}(P - A)$ , obtendo o ponto  $P_1 = R_{O,\alpha}(P - A) + A$ .

Contudo, podemos seguir uma perspetiva diferente. Note-se que

$$\begin{aligned} P_1 = R_{A,\alpha}P &= R_{O,\alpha}(P - A) + A = \\ &= R_{O,\alpha}P + (I - R_{O,\alpha})A = R_{O,\alpha}P + S_\alpha A, \end{aligned}$$

onde  $I$  é a matriz identidade e  $S_\alpha = I - R_{O,\alpha}$ . Logo, podemos obter  $P_1$

(i) aplicando a rotação de centro  $O$  e amplitude  $\alpha$  ao ponto  $P$ , obtendo o ponto  $R_{O,\alpha}P$ ;

(ii) e, depois, aplicando a translação associada ao vetor  $S_\alpha A$  ao ponto  $R_{O,\alpha}P$ .

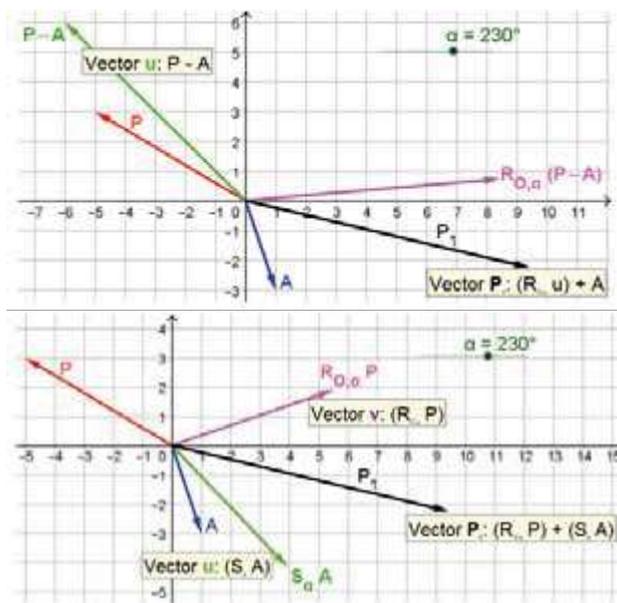


Figura 1.

### 3. COMPOSTA DE DUAS ROTAÇÕES

Consideremos duas rotações, digamos uma de centro  $A$  e amplitude  $\alpha$  e outra de centro  $B$  e amplitude  $\beta$ . Vamos estudar a sua composição sem recorrer ao uso de reflexões. Veremos que esta composição é uma translação se  $\alpha + \beta = 2\pi$  e uma rotação caso contrário. No caso da translação, veremos também que o vetor de translação pode ser descrito a partir dos pontos  $A$  e  $B$  e da matriz  $S_\beta$ . No caso da rotação, veremos que  $R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P = R_{O,\gamma}P + S_\gamma C = R_{C,\gamma}P$  onde  $\gamma = \alpha + \beta$  e  $C$  é um ponto que pode ser descrito a partir dos pontos  $A$  e  $B$  e das matrizes  $S_\beta$  e  $S_\gamma$ .

Note-se que

$$\begin{aligned} R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P &= R_{O,\beta}[R_{O,\alpha}P + S_\alpha A] + S_\beta B \\ &= R_{O,\beta}R_{O,\alpha}P + R_{O,\beta}S_\alpha A + S_\beta B \\ &= R_{O,\gamma}P + R_{O,\beta}S_\alpha A + S_\beta B \end{aligned}$$

Logo, como  $S_\gamma - S_\beta = R_{O,\beta} - R_{O,\gamma} = R_{O,\beta}(I - R_{O,\alpha}) = R_{O,\beta}S_\alpha$ , temos que

$$R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P = R_{O,\gamma}P + (S_\gamma - S_\beta)A + S_\beta B.$$

#### 3.1. Caso $\gamma = \alpha + \beta = 360^\circ$

Neste caso,  $R_{O,\gamma} = I$ ,  $S_\gamma$  é a matriz nula e  $R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P = P + S_\beta(B - A)$ , ou seja, estamos na presença da translação associada ao vetor  $S_\beta(B - A)$ . Ilustramos este caso na figura 2.

Uma situação particular deste caso acontece quando  $\alpha = \beta = 180^\circ$ . Note-se que  $R_{O,\beta} = -I$ ,  $S_\beta = 2I$  e  $R_{B,\beta}R_{A,\alpha}P = P + 2(B - A)$ . Estamos, portanto, na presença da translação associada ao vetor  $2\vec{AB}$ . Esta situação está ilustrada na figura 3.

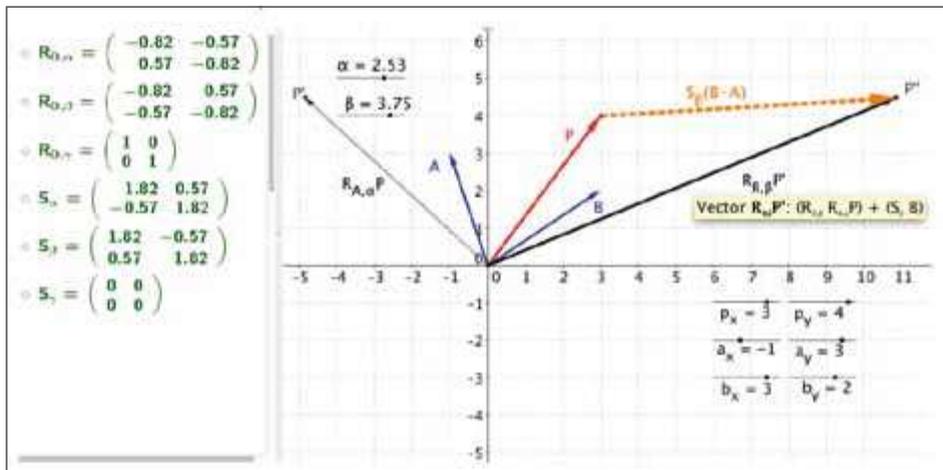


Figura 2: O efeito de  $R_{B,\beta}R_{A,\alpha}$  sobre um ponto arbitrário  $P$  quando  $\gamma = \alpha + \beta = 360^\circ$ .

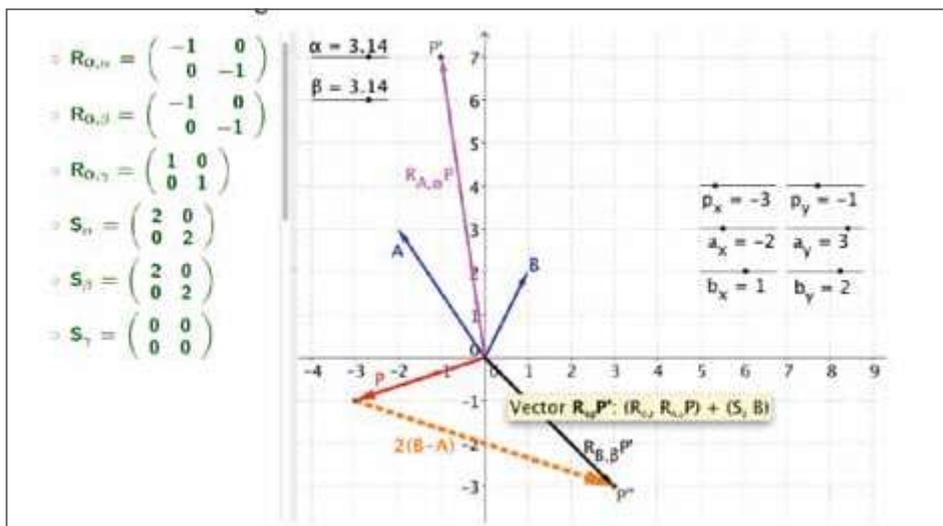


Figura 3: O efeito de  $R_{B,\beta}R_{A,\alpha}$  sobre um ponto arbitrário  $P$  quando  $\alpha = \beta = 180^\circ$ .

### 3.2. Caso $\gamma = \alpha + \beta \neq 360^\circ$

Denotando por  $S_\gamma^T$  a matriz transposta de  $S_\gamma$ , temos que

$$S_\gamma^T S_\gamma = (I - R_{O,\gamma})^T (I - R_{O,\gamma}) = (I - R_{O,-\gamma})(I - R_{O,\gamma}) \\ = I - R_{O,-\gamma} - R_{O,\gamma} + I = 2(1 - \cos \gamma)I,$$

pois  $R_{O,-\gamma} + R_{O,\gamma} = 2 \cos \gamma \cdot I$ . Logo, a matriz  $S_\gamma$  é invertível com matriz inversa  $S_\gamma^{-1} = \frac{1}{2(1-\cos \gamma)} S_\gamma^T$ . Se considerarmos agora  $C = S_\gamma^{-1}((S_\gamma - S_\beta)A + S_\beta B)$ , concluímos que

$$R_{B,\beta} R_{A,\alpha} P = R_{O,\gamma} P + (S_\gamma - S_\beta)A + S_\beta B \\ = R_{O,\gamma} P + S_\gamma C = R_{C,\gamma} P,$$

ou seja, obtemos a rotação de centro  $C$  e amplitude  $\gamma$ . Finalmente, vejamos melhor a descrição do ponto  $C$ :

$$C = (I - S_\gamma^{-1} S_\beta)A + S_\gamma^{-1} S_\beta B = (I - L)A + LB$$

onde  $L = S_\gamma^{-1} S_\beta = \frac{1}{2(1-\cos \gamma)} S_\gamma^T S_\beta$ .

Uma situação particular com algum interesse surge

quando  $\gamma = \alpha + \beta = 180^\circ$ . Neste caso,  $S_\gamma^{-1} = \frac{1}{2}I$ , pois  $S_\gamma = 2I$ , e  $L = S_\gamma^{-1} S_\beta = \frac{1}{2}S_\beta = \frac{1}{2}I - \frac{1}{2}R_{O,\beta}$ . Assim,

$$C = \left(\frac{1}{2}I + \frac{1}{2}R_{O,\beta}\right)A + \left(\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}R_{O,\beta}\right)B \\ = \left(\frac{A+B}{2}\right) + R_{O,\beta} \left(\frac{A-B}{2}\right).$$

Ilustramos esta situação particular na figura 5.

### 4. COMPOSTA DE TRÊS MEIAS-VOLTAS

Consideremos três meias voltas,  $R_{A,\alpha}$ ,  $R_{B,\beta}$  e  $R_{C,\gamma}$ , de centros  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Logo  $\alpha = \beta = \gamma = \pi$ . Pelos cálculos já efetuados em 4.1,

$$R_{C,\gamma} R_{B,\beta} R_{A,\alpha} P = R_{C,\gamma} [P + 2(B - A)] \\ = -I[P + 2(B - A)] + 2IC \\ = -P + 2(A - B + C),$$

pois  $R_{O,\gamma} = -I$  e  $S_\gamma = 2I$ , ou seja,  $R_{C,\gamma} R_{B,\beta} R_{A,\alpha} P = R_{D,\pi} P$

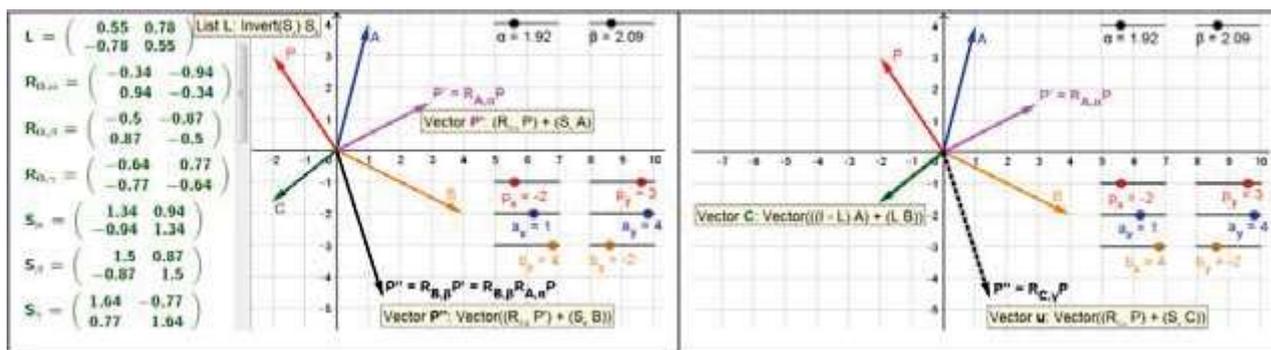


Figura 4.

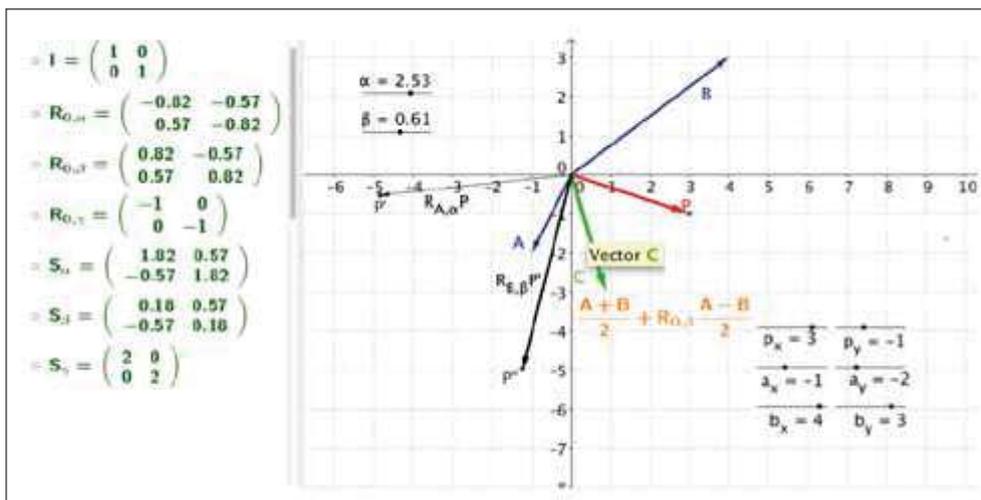


Figura 5: O efeito de  $R_{B,\beta} R_{A,\alpha}$  sobre um ponto arbitrário  $P$  quando  $\gamma = \alpha + \beta = 180^\circ$ .

onde  $D = A - B + C$ . Verificamos assim que a composição de três meias-voltas é outra meia-volta de centro no ponto  $D$ . Note-se também que

$$\begin{cases} \vec{AB} = \vec{DC} \\ \vec{BC} = \vec{AD} \end{cases}$$

Daí, que  $D$  seja o quarto vértice do paralelogramo definido pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (se  $A$ ,  $B$  e  $C$  forem colineares, então estamos a considerar um paralelogramo degenerado e  $D$  também é colinear com estes três pontos). A figura 6 ilustra este resultado.

*Agradecimento:* Gostaria de agradecer aos editores e revisores da *Gazeta Matemática* pelos seus úteis comentários.

#### SOBRE O AUTOR

**Günhan Caglayan** leciona matemática na New Jersey City University. Os seus principais interesses são a visualização matemática e a aprendizagem dos alunos através da modelação e visualização.

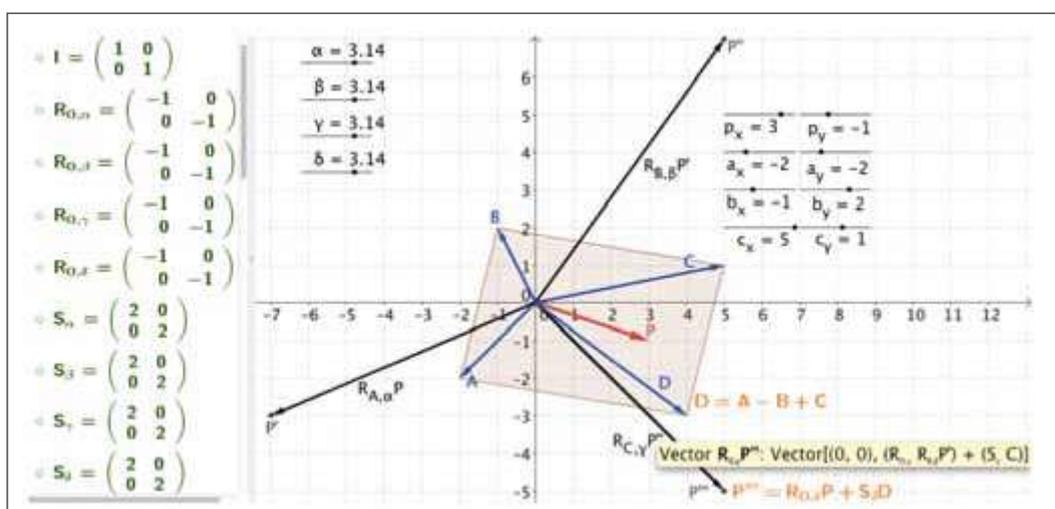


Figura 6: A composição de três meias-voltas é outra meia-volta.



LOJA  
spm

Consulte o catálogo e faça a sua encomenda online em [www.spm.pt](http://www.spm.pt)