

No âmbito de uma colaboração entre a Gazeta e o Atractor, este é um espaço da responsabilidade do Atractor; relacionado com conteúdos interativos do seu site [www.tractor.pt](http://www.tractor.pt). Quaisquer reações ou sugestões serão bem-vindas para [tractor@tractor.pt](mailto:tractor@tractor.pt)

## O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI E AS TORRES DE HANÓI

Vamos descrever alguns modelos do jogo das Torres de Hanói que permitem uma visão geométrica da solução ótima do jogo e da forma como essa solução se relaciona com o conjunto de todas as posições possíveis dos discos e o de todos os movimentos permitidos pelas regras do jogo.

Comecemos por recordar que neste jogo há um tabuleiro com três hastes e discos empilhados numa delas, nunca devendo estar um disco sobre outro mais pequeno. Em cada jogada, move-se um disco de cima de uma haste para outra. O objetivo é o de mudar todos os discos para uma dada haste no mínimo de jogadas. A propósito, veja-se [1] e [2].

Uma ideia muito simples que ocorre, ao quisermos associar a uma distribuição dos três discos pelas hastes um ponto que a caracterize, é a seguinte: escolher no triângulo da base do jogo com vértices nos centros dessas hastes, a projeção, no tabuleiro, do baricentro das massas (dessa distribuição). Claro que os pontos concretos assim obtidos vão depender em geral das razões entre as massas dos diferentes discos, exceto quando todos os discos estão numa mesma haste, caso em que o baricentro será sempre o ponto do tabuleiro no centro dessa haste. E estes casos extremos, em que todos os discos estão empilhados numa haste, são interessantes, pois tanto a posição inicial como a final do jogo estão nessas condições.

A figura 1 representa uma fase do jogo no qual se pretende levar quatro discos inicialmente na haste de baixo para a haste da direita. Quanto à figura 2, mostra os baricentros dos discos, correspondentes às diferentes fases desse jogo completo. A curva poligonal, começando no vértice inferior do triângulo, que é o baricentro da torre inicial de discos, e terminando no vértice da direita, baricentro da torre de chegada, foi desenhada unindo por

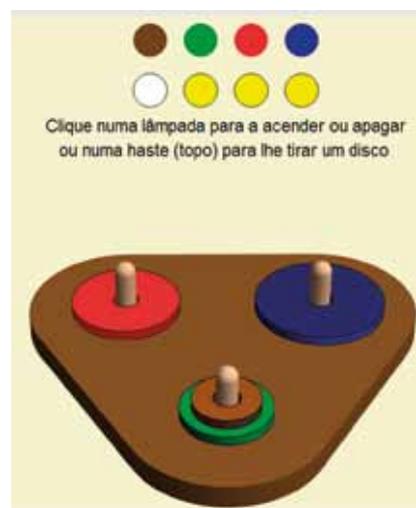


Figura 1.

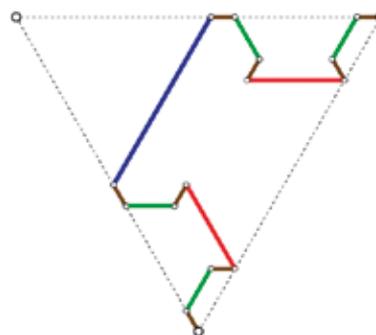


Figura 2.

segmentos de reta os baricentros obtidos após cada jogada, cada um com a cor do disco que foi movido nessa jogada. Não espanta que o segmento maior seja o azul, dado que o disco azul é o de maior massa e, portanto, aquele que, quando é movido, provoca uma maior alteração do centro de massa (baricentro). Um aspecto interessante da figura 2 é os 15 segmentos da figura só representarem três direções diferentes. Isto resulta de que: i) num sistema (finito) de massas, quando uma delas se desloca numa dada direção, o baricentro também se vai deslocar na mesma direção; ii) no caso presente, o movimento de um disco realiza-se sempre entre um par de hastes; iii) sendo três o número de hastes, também é três o número de pares de hastes. Como exercício, o leitor poderá querer descobrir qual o ponto na figura 2 que corresponde à posição dos discos representada na figura 1.

Feita esta apresentação do que se pretende, vamos agora ver alguns cuidados que é necessário ter para o modelo realmente funcionar como queremos. Será que o modelo é bom? Sem algumas cautelas na escolha das massas dos discos, a resposta é negativa e, ao contrário do que possa parecer, não se trata de uma apreciação subjetiva. Para que o modelo que foi sugerido funcione adequadamente,

o mínimo que teremos de exigir é que, a partir do conhecimento do baricentro, possamos saber qual a distribuição dos discos pelas hastes, que ele representa. Por outras palavras: quando associamos a cada distribuição de massas pelas hastes o respetivo baricentro, queremos que a função assim definida seja injetiva. Vejamos um exemplo muito simples: suponhamos que temos apenas três discos, de massas, respetivamente, 1, 2 e 3<sup>1</sup>. Se o disco maior estiver na haste de baixo e os outros dois na da direita, como na figura 3, o baricentro será exatamente o ponto médio do lado correspondente do triângulo, porque as massas nos dois extremos são as mesmas (3 e 2 + 1). Mas, então, se trocarmos a posição do disco maior com a posição dos outros dois, como na figura 4, o baricentro obtido será o mesmo. Logo, para aquelas escolhas de massas, o conhecimento do baricentro não permite saber sempre qual a distribuição real dos discos pelas hastes.

Como poderemos escolher as massas, de forma a estarmos certos de obter uma boa representação, no sentido de que duas distribuições diferentes dos discos pelas três hastes nunca levem ao mesmo baricentro no triângulo? No caso das massas que puseram problemas, bastaria ter escolhido a massa maior ligeiramente superior à soma

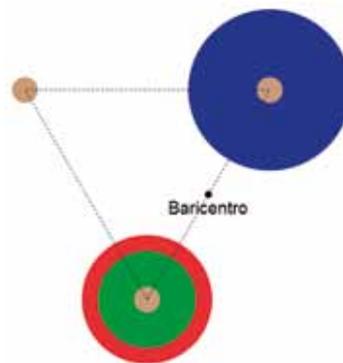
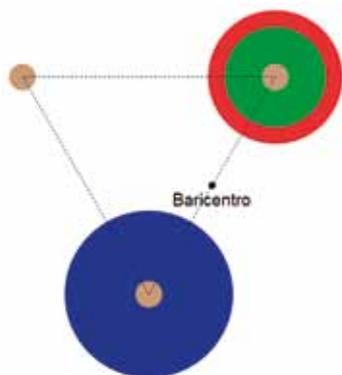
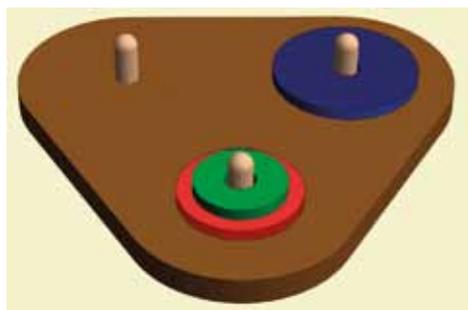
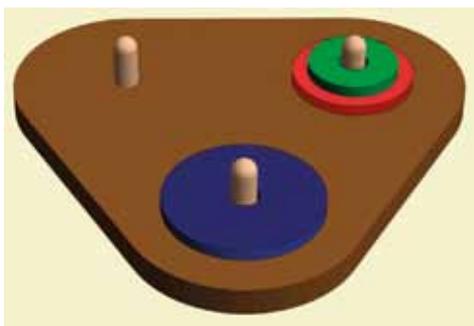


Figura 3.

Figura 4.

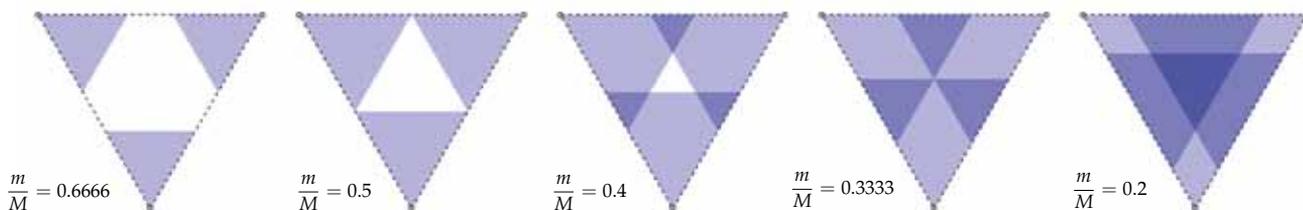


Figura 5.

das outras duas para o modelo passar a ser "bom" no sentido atrás referido. Mais geralmente, para uma distribuição de  $n$  discos com massa total  $M$ , se o maior, de massa  $m$ , estiver numa haste, podemos afirmar<sup>2</sup> que o baricentro estará no triângulo homotético, com centro de homotetia nessa haste e razão de homotetia  $(M-m)/M$ , do triângulo inicial de vértices nas três hastes (ver figura 5 para vários valores de  $m/M$ ). Para estarmos certos de que a posição do baricentro das massas determina a haste em que está o maior disco, bastará<sup>3</sup> que os três triângulos homotéticos correspondentes às três hastes não se interessem. Ora isto sucede se e só se  $(M-m)/M < 1/2$ , o que equivale a  $m/M > 1/2$  ou  $m > (M-m)$ , por outras palavras, se e só se o disco maior tiver massa superior à soma das massas dos discos mais pequenos do que ele. Esta condição, satisfeita na figura 5 apenas para o primeiro caso, é suficiente para garantir que, dadas duas distribuições de massas pelas hastes, em que o disco maior não esteja na mesma haste, elas conduzam necessariamente a baricentros diferentes. Mas isto não exclui que os baricentros possam coincidir para duas distribuições que só difiram nas massas de discos mais pequenos. Uma extensão do raciocínio anterior permite, no entanto, garantir que, se a massa de cada disco for maior do que a soma das massas dos discos mais pequenos do que ele, então a representação por baricentros é boa no sentido acima descrito: uma tal representação por pontos no plano caracteriza completamente a distribuição dos discos pelas hastes (e até as razões entre as diferentes massas).

Vejamos então o que se passa num exemplo concreto satisfazendo esta condição: tomemos  $n$  discos com massas  $m_i = 1/2^i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . A soma das massas dos discos todos é  $M_n = 1 - 1/2^n$  e, para cada  $i < n$ , a soma das massas dos discos de índices maiores do que  $i$ , i.e., de massas menores do que a do de índice  $i$ , é  $(1 - 1/2^n) - (1 - 1/2^i) = (1/2^i) \cdot (1 - 1/2^{(n-i)}) < 1/2^i = m_i$ . Portanto, estas massas dão origem a um bom modelo de

baricentros, uma vez que a massa de cada disco é maior do que a soma das massas dos discos mais pequenos. A figura 6 mostra três diagramas, obtidos para tabuleiros com três, quatro e cinco discos, respetivamente. Todas as posições possíveis dos discos estão representadas pelos baricentros (das massas nas três hastes) e todas as jogadas também, pelos segmentos correspondentes aos movimentos permitidos dos discos, segmentos esses com a cor do disco movido e unindo o baricentro antes do movimento, ao baricentro depois do movimento. Em cada diagrama, os segmentos mais grossos correspondem à solução ótima, aquela que envolve menor número de movimentos para levar todos os discos da haste inferior para a da direita. Essa linha grossa dá uma indicação clara sobre quais os discos a mover e em que direção; por exemplo, olhando para o diagrama da esquerda, correspondente a três discos, vê-se que há que começar por deslocar o disco verde da haste de baixo para a da direita, depois o vermelho da de baixo para a da esquerda, novamente o verde da da direita para a da esquerda, o azul da de baixo para

<sup>1</sup>Neste contexto as unidades não interessam, porque só são relevantes as razões entre as massas dos discos.

<sup>2</sup>Bastará observar que um tal baricentro tem como coordenada baricêntrica relativamente ao vértice da haste que contém o maior disco, precisamente o número  $m/M$ . O leitor não familiar com geometria afim poderá provar diretamente a afirmação em  $\mathbb{R}^2$ . Poderá começar por verificar que, se  $a, b, c$  são três números reais de soma 1 e  $A, B, C$  três pontos não colineares do plano, e se para um ponto  $O$  qualquer do plano,  $v_O$  designar a soma dos vetores  $a \cdot (A - O)$ ,  $b \cdot (B - O)$  e  $c \cdot (C - O)$ , o ponto  $G$ , definido por  $G = O + v_O$  não depende da escolha de  $O$ . Os números  $a, b, c$  dizem-se as coordenadas baricêntricas de  $G$  relativas a  $A, B$  e  $C$ . Os pontos do triângulo  $A, B, C$  (incluindo o interior) são os que têm todas as coordenadas baricêntricas maiores ou iguais a zero. Um vértice do triângulo tem a respectiva coordenada baricêntrica 1 e as restantes nulas. E a coordenada  $a$  é nula se e só se o ponto  $G$  estiver no lado oposto a  $A$ . Para um valor de  $a$  tal que  $0 < a < 1$ , os pontos que o têm como primeira coordenada baricêntrica são precisamente os do segmento paralelo a  $BC$  de extremos em  $AB$  e  $AC$  e tal que  $a$  seja a razão das distâncias a  $BC$  desse segmento e do ponto  $A$ . Analogamente para  $b, b$  e  $C, c$ .

<sup>3</sup>Note-se que não estamos a afirmar que esta condição é necessária.

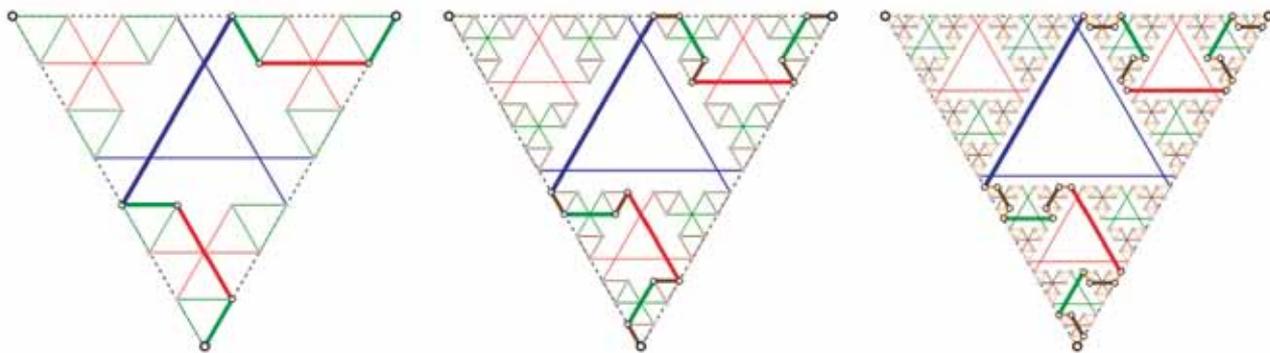


Figura 6.



Figura 7.

a da direita, etc. Como exercício, o leitor poderá procurar no diagrama do meio o caminho mais curto para levar os quatro discos da haste esquerda para a direita.

Em cada diagrama da figura 6, a parte da curva grossa antes do segmento azul tem exatamente a mesma forma que a parte após esse segmento e, em particular, o número de jogadas antes desse movimento do disco azul é o mesmo que o das jogadas posteriores. Tal tem a ver com o facto de que no jogo, como é sabido, quando chega a ocasião de deslocar o disco maior, está-se exatamente a meio do jogo: antes, mudaram-se os discos mais pequenos para a haste da esquerda e, em seguida, por uma sucessão análoga de movimentos, mudam-se esses mesmos discos dessa haste para a direita. Se, para um  $n$ ,  $f(n)$  designar o número mínimo de jogadas para o transporte dos discos, será, pois  $f(n) = 2f(n - 1) + 1$ .

Claro que este comportamento se manifesta em qualquer modelo isomorfo (ver [1] para o caso do Jogo das Lâmpadas).

Designando por 0, 1, 2, respetivamente, as hastes de baixo, da direita e da esquerda, vamos representar por  $ij$  o movimento do disco de cima da haste  $i$  para a haste  $j$ , em que  $i, j$  são dois daqueles três números. Por exemplo, a solução do jogo, trivial no caso de existir um só disco, só terá um movimento e é representada por 01. No jogo

com dois discos, a solução será 02 01 21, em que o disco mais pequeno vai para a haste vazia (2), depois move-se o disco grande para a haste 1 e, finalmente, o disco pequeno da haste 2 para a 1. Para maior clareza, escreveremos  $ij$  na cor do disco movido e usaremos tamanhos relativos de letras correspondendo aos tamanhos relativos dos discos movidos. Baseados nesta ideia, definimos uma função  $f$  que a um par  $ij$  num certo tamanho (e cor) faz corresponder um terno de pares  $ik\ ij\ kj$ , tendo  $ik$  e  $kj$  uma cor contígua à usada para  $ij$  e sendo  $k$  o número de  $\{0, 1, 2\}$  diferente de  $i$  e de  $j$ ; e outra função  $g$  que, em cada lista de pares assim obtidos, substitui cada um dos pares  $mn$  da cor correspondente ao disco mais pequeno presente na lista pelo seu transformado por  $f$ . Partindo de um só disco, temos 01 como solução do jogo. Aplicando  $g$ , temos 02 01 21 e, aplicando  $g$  novamente, ou seja, substituindo cada par vermelho pela respetiva imagem por  $f$ , temos 01 02 12 01 20 21 01. O segundo iterado de  $g$  aplicado a esta lista dá a lista representada na figura 7, que, para maior clareza, tem algumas linhas a envolver as diversas fases.

As funções  $f$  e  $g$  podem ser utilizadas para construir a lista de movimentos da solução ótima para qualquer número de discos, de uma forma inteiramente automática, sem nenhum recurso explícito ao jogo, aos discos e às regras.

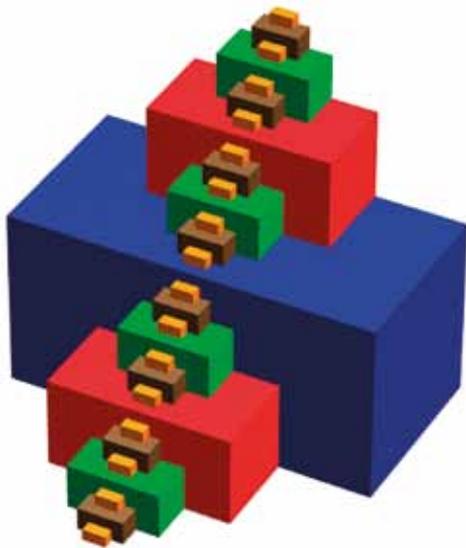


Figura 8.

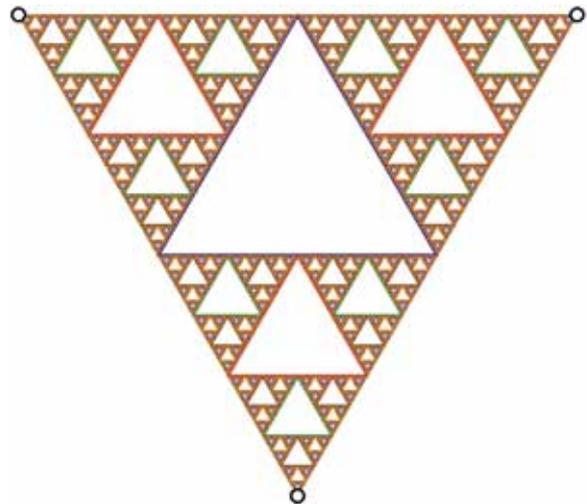


Figura 9.

A figura 8 mostra um modelo da solução ótima, obtido tomando paralelepípedos de tamanhos e cores correspondentes às massas dos discos, em números iguais aos dos sucessivos movimentos desses discos e dispostos como a figura 8 indica, no caso de cinco discos. Haverá, pois, um azul, dois vermelhos, quatro verdes, oito castanhos e 16 amarelos. Ao percorrer a "escadaria", vamos encontrando sucessivamente as cores e os tamanhos dos discos a mover. E fica claro como se construiria o modelo para seis discos a partir deste modelo de cinco discos, juntando 32 paralelepípedos mais pequenos. Na reunião da sucessão de sólidos assim obtidos, a menos da cor, ao ampliar a "escadaria" verifica-se uma autossimilaridade. Este modelo e o da figura 7 são sugestivos, mas "descrevem" apenas uma solução ótima do jogo das Torres de Hanói. Uma vantagem do modelo dos baricentros, atrás considerado, é que ele descreve também o conjunto de todas as posições possíveis dos  $n$  discos e de todos os movimentos permitidos, independentemente de aparecerem ou não no percurso ótimo, e isso permite ver como o tal percurso ótimo se situa nesse conjunto mais vasto. Por exemplo, consideremos a seguinte questão: dados  $n$  discos, ao levá-los no número mínimo de movimentos da haste 0 para a haste 1, e da haste 0 para a haste 2 (ou de 1 para 2), será que durante esses dois percursos se passa, em alguma fase intermédia, por uma mesma distribuição de discos pelas hastas? A tradução da questão para o modelo dos baricentros é fácil: duas linhas poligonais

de comprimento minimal unindo dois pares diferentes de vértices podem passar por um mesmo baricentro do modelo (interior ao triângulo)? A observação atenta da figura 6 ajuda a ter uma interpretação geométrica do que está em causa.

No modelo concreto dos baricentros de todas as posições possíveis, que definimos acima, há também um fenómeno de autossimilaridade e um conjunto limite, mas a sua definição requer algum cuidado que não era necessário no caso do modelo da figura 8, porque nele, quando o número de discos aumenta, não se muda a parte já existente, apenas se acrescentam novos paralelepípedos mais pequenos, ao passo que no modelo dos baricentros, excluindo os vértices do triângulo grande, todos os baricentros vão sempre mudando. Isto tem a ver com o facto de a massa total dos discos ser variável e inferior a 1, o que faz com que, por exemplo na figura 6, a coordenada baricêntrica (constante) referente à haste esquerda, de todos os pontos do segmento azul mais grosso seja  $(1/2)/(7/8) = 4/7$  no caso do diagrama da esquerda,  $(1/2)/(15/16) = 8/15$  no do centro e  $(1/2)/(31/32) = 16/31$  no da direita. Essa coordenada é sempre maior do que  $1/2$ , como vimos que deveria ser para termos um bom modelo e tende para  $1/2$  quando o número  $n$  de discos tende para infinito. E algo de análogo se passa para os restantes segmentos. Não admira, pois, que o triângulo de Sierpinski tenha alguma relação com o limite daqueles diagramas, como sugere, já para  $n = 9$ , o diagrama representado na figura 9, incluindo os bari-

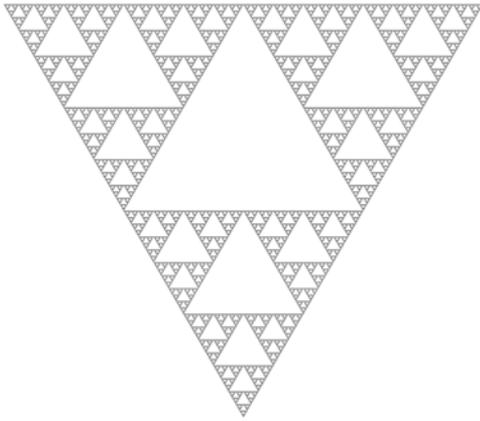


Figura 10.

centros e os segmentos correspondentes aos movimentos dos discos. A figura 10 representa todos os baricentros, sem movimentos, para  $n = 10$ .

É, no entanto, possível construir um modelo concreto de baricentros, análogo ao introduzido acima, mas com outras massas, de tal forma que a massa total seja sempre 1 e, portanto, as coordenadas baricêntricas dos segmentos correspondentes à quase totalidade dos discos (todos menos o último) permaneçam constantes à medida que acrescentamos um disco: para  $n$  discos, basta escolher como massa do disco maior  $2/3$ , depois cada disco tem massa igual a um terço da do anterior, exceto o mais pequeno, que tem metade da massa do anterior. Por exemplo, para  $n = 3$  teremos massas  $2/3, 2/9, 1/9$ , para  $n = 4$  será  $2/3, 2/9, 2/27, 1/27$  e  $2/3, 2/9, 2/27, 2/81, 1/81$  para  $n = 5$ . Os novos diagramas para  $n$  entre 3 e 5 (análogos aos da figura 6, mas agora para estas novas distribuições de massas) estão representados na figura 11. A passagem de um diagrama ( $n$ ) ao seguinte ( $n + 1$ ) corresponde agora à substituição de cada pequeno triângulo com a cor do disco mais pequeno por três segmentos dessa cor, com três novos triângulos com a cor do disco ainda mais pequeno, como está representado na figura 12, referente à passagem da primeira imagem da figura 11 para a segunda.

Em [3] há um CDF que permite deformar o modelo de baricentros com fator  $1/2$  no modelo com fator  $1/3$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] "Jogos Isomorfos", *Gazeta de Matemática* n.º 169, março 2013, <http://www.atractor.pt/publicacoes/395.pdf>
- [2] "Jogos Isomorfos", <http://www.atractor.pt/mat/JogosIsomorfos>
- [3] Jogos Isomorfos II, <http://www.atractor.pt/mat/SierpHanoi>

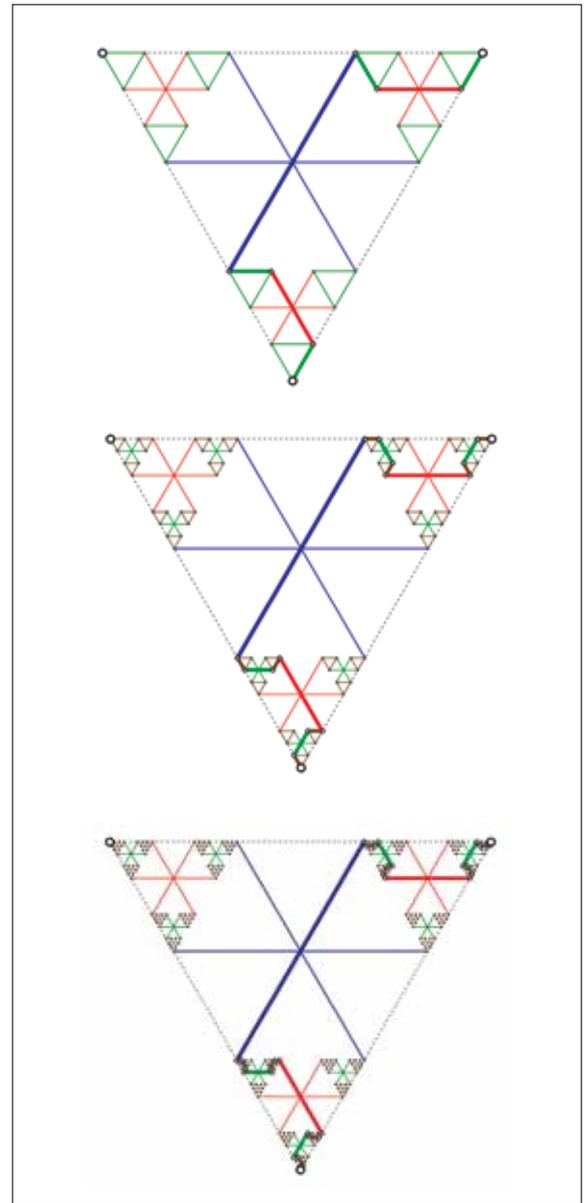


Figura 11.

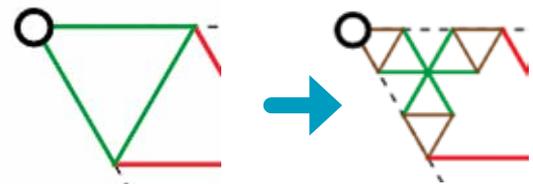


Figura 12.