

COMO MERCATOR FEZ O SEU MAPA

Gerardus Mercator conseguiu uma proeza notável em 1569: desenhar um mapa em que as linhas de rumo se representavam por linhas retas. Deixou-nos, porém, um problema para resolver, pela ausência de anotações sobre o seu trabalho: que método usou para o fazer?



PEDRO J. FREITAS
Universidade de Lisboa
pjfreitas@fc.ul.pt



MANUEL SILVA
Universidade Nova de Lisboa
mnas@fct.unl.pt

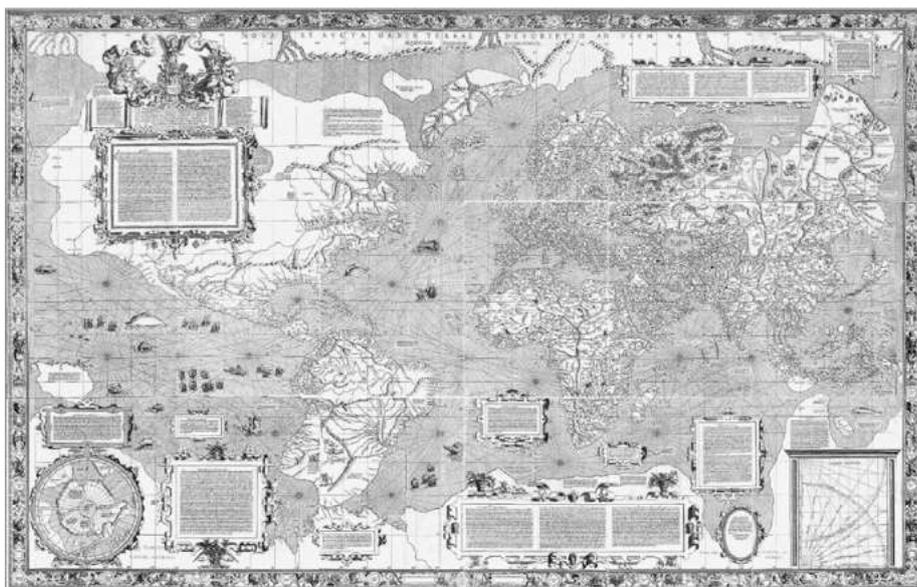


Figura 1. Mapa de Gerardus Mercator (1569).

O problema que trazemos hoje não é estritamente matemático, por lidar com um objeto físico: um famoso mapa. Falamos do mapa de Gerardus Mercator, de 1569, no qual, pela primeira vez, as linhas de rumo estudadas por Pedro Nunes eram representadas por linhas retas (ver figura 1).

Além do mapa, Mercator deixou-nos também um problema: que método usou para o desenhar? Não se tendo encontrado anotações sobre o assunto, desde os finais do século XIX que há artigos com contribuições para o resolver. Recentemente, no artigo [2], é descrita

uma solução que parece coerente e completa, solução essa que aqui expomos.

As linhas de rumo, hoje também chamadas curvas loxodrómicas (ou simplesmente loxodrómicas) são curvas sobre a esfera com a seguinte propriedade: o ângulo que fazem com cada meridiano é constante. A figura 2, da autoria de Carlos Albuquerque, apresenta uma loxodrómica correspondente ao ângulo de 80° com os meridianos.

A curva loxodrómica foi apresentada e estudada matematicamente por Pedro Nunes em 1537, em [3], e o seu estudo foi revisto e aprofundado nas *Obras completas*,

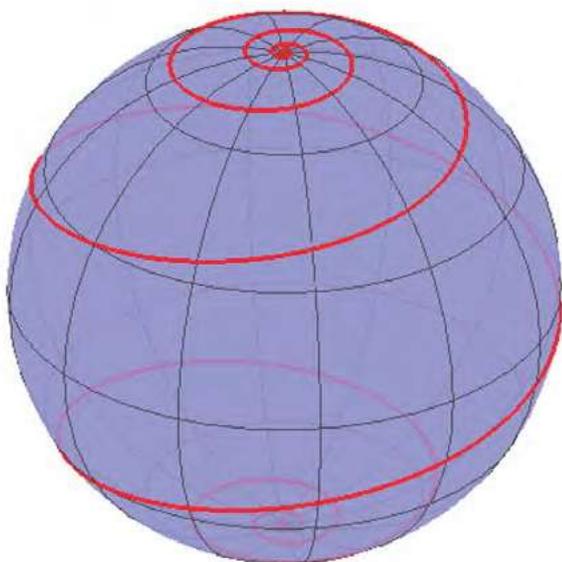


Figura 2. Loxodrómica correspondente a 80°.

[4], em 1566, escritas em latim e publicadas em Basileia. Uma das inovações na segunda obra foi a demonstração de que a curva não entrava no polo, isto é, tratava-se de uma curva infinita na esfera, algo completamente novo na geometria do século XV.

Esta curva tinha importância no tempo das navegações porque, para manter a rota de um navio sobre esta linha, bastava manter o ângulo de navegação fixo com o norte, o que se conseguia simplesmente usando uma bússola. Era muito mais fácil do que navegar sobre um círculo máximo, por exemplo. Pedro Nunes, em [3], refere que no seu tempo havia a crença de que ao navegar mantendo fixo o ângulo com o norte, o navio percorreria um círculo máximo. Esclarece, porém, que isso não acontece, e dá um método, baseado em trigonometria esférica, para conseguir aproximar o círculo máximo através de arcos de loxodrómicas, propondo a sua utilização a bordo (algo que parece que nunca chegou a acontecer).

Assim, a loxodrómica apareceu inicialmente como uma curva auxiliar na descrição do rumo de um navio, que se pretendia que decorresse sobre um círculo máximo (para minimizar a distância navegada). No entanto, a expressão usada por Pedro Nunes para a designar, “linha de rumo” mostra já o desejo de que esta seja a curva a considerar para o rumo de um navio sobre a esfera terrestre, por ser muito mais simples navegar segundo esta do que sobre um círculo máximo. A própria expressão

pode referir-se ao “rumo” isto é, ao ângulo que se mantém constante com os meridianos. É o próprio Pedro Nunes que afirma, em [3], que seria bom que houvesse um mapa em que as linhas de rumo fossem representadas por linhas retas, para facilitar a navegação.

Esse problema seria resolvido em 1569 por Gerardus Mercator, famoso cartógrafo flamengo, que desenvolveu a projeção que tem o seu nome, usada ainda hoje em cartas náuticas. A propriedade destas cartas é, então, que as loxodrómicas se representam como linhas retas. Representando meridianos e paralelos como linhas perpendiculares no mapa, isto equivale a dizer que a proporção entre comprimentos de arcos de meridianos e de paralelos é a mesma no mapa e no globo terrestre. Isto faz desta projeção uma *projeção conforme*, isto é, não distorce os ângulos ao passar do globo para o mapa. Gera, no entanto, uma distorção de áreas, devido ao maior espaçamento dos paralelos ao aumentar a latitude: o fator de dilatação é dado pela secante da latitude, que tende para infinito quando a latitude tende para 90 graus.

No mapa podem ver-se vários pontos donde emanam linhas retas, correspondentes aos vários rumos: habitualmente, cada ângulo de 90 graus era dividido em oito ângulos de 11,25°, e as linhas retas que os dividiam eram chamadas rumos, numerados de 1 a 7. Por exemplo, o segundo rumo correspondia ao ângulo de 22,5°.

Mercator não deixou nenhuma referência ao método usado para desenhar este mapa. Assim, desde há cerca de 125 anos que várias propostas têm sido feitas no sentido de esclarecer qual teria sido esse método. A solução agora encontrada, e descrita em [2], baseia-se no método usado no século XVI para descrever uma loxodrómica: a tabela de rumos. Esta tabela consistia simplesmente numa lista de longitudes e respetivas latitudes, calculadas ao longo da curva. O próprio Pedro Nunes apresenta, em [4], um método para construir uma tabela de rumos, embora deixe a tabela em branco, ficando o trabalho para os “moços aplicados”.

Hoje em dia, esta descrição pode ser dada pela função

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2 \arctan e^{\lambda \cotan \alpha}$$

em que φ é a latitude, calculada em função da longitude λ e do rumo (ângulo) α . Para uma dedução desta fórmula, veja-se, por exemplo, o artigo [5], noutra número desta mesma revista.

O artigo [2] (de onde tiramos a explicação seguinte) propõe que o mapa tenha sido construído a partir de uma destas tabelas de rumos, usando como método

exatamente a sua propriedade definidora: que a linha de rumo seja uma reta. O método, simplificado, é o seguinte. Traça-se inicialmente um equador graduado, definindo assim longitudes (e, portanto, meridianos). Desenha-se então uma reta, fazendo um ângulo dado com o equador, e marcam-se sobre ela as latitudes dadas pela tabela de rumos para esse ângulo, respeitantes às longitudes já marcadas. Fica assim o reticulado de meridianos e paralelos definido sobre o mapa, que permite depois o desenho. É um método simultaneamente engenhoso e simples.

O modo de fundamentar a tese de que este tinha sido o método usado foi o de comparar os erros do mapa com os erros de tabelas de rumos disponíveis na altura. No entanto, foi necessário separar os erros originados pelo método, já presentes na tabela, dos erros acumulados ao longo do tempo pela distorção física do mapa (note-se que este foi o primeiro artigo a fazer esta distinção). Isto foi conseguido graças a uma pequena figura no canto inferior direito do mapa, chamado *Organum directorium* (figura 3), onde se representam os sete rumos, com gradação. Aqui, a distorção física fica visível, pois é possível comparar os graus representados no mapa com os graus medidos efetivamente. Ou seja, podemos com-

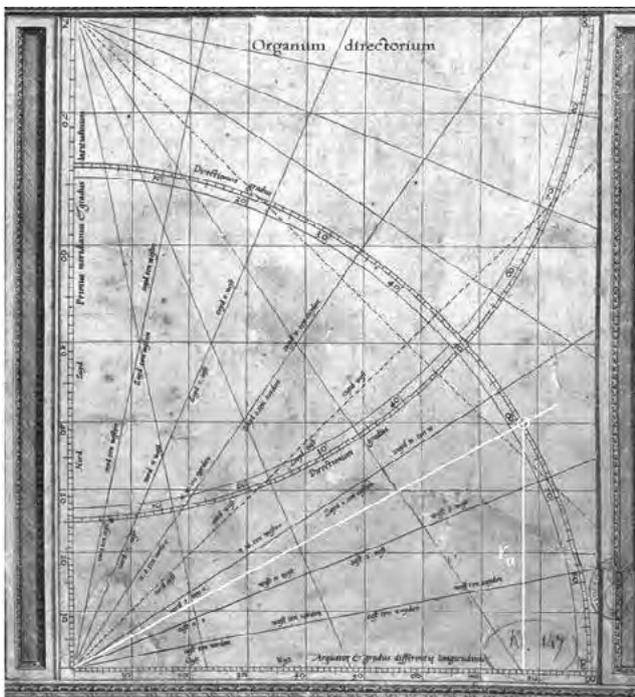


Figura 3. *Organum directorium* do mapa de Mercator.

par a ordenada Y_α dada teoricamente pelo ângulo α com a que se mede efetivamente no mapa.

Faltava então encontrar a tabela com os erros corrigidos agora encontrados. Depois de se testarem várias tabelas disponíveis em 1569, foi encontrada uma em que havia uma notável coincidência de erros para as latitudes descritas no segundo rumo, $22,5^\circ$. Esta tabela usava intervalos de um grau para as longitudes e as diferenças de erro entre a tabela e o mapa são de menos de um quinto de grau. Em comparação com outros métodos apresentados, este é aquele que mais se aproxima das ordenadas do mapa original de Mercator.

Como dissemos no início, este não é um problema estritamente matemático, envolvendo até questões de distorção física de mapas. No entanto, esta proximidade muito grande dos erros leva-nos a acreditar que está aqui finalmente a resolução de um importante e antigo problema de cartografia.

Pode ler-se mais sobre este assunto (nomeadamente, a sua relação com os trabalhos de Pedro Nunes) no artigo [1], no qual este texto se baseia.

REFERÊNCIAS

- [1] Pedro Freitas, "Pedro Nunes and Mercator: a Map From a Table of Rhumbs", *CIM Bulletin* 37, October 2016, pp 21-25.
- [2] Joaquim Alves Gaspar e Henrique Leitão, "How Mercator Did It in 1569: From Tables of Rhumbs to a Cartographic Projection" *EMS Newsletter* 99, March 2016, pp 44--49.
- [3] Pedro Nunes, *Obras, Vol I: Tratado da sphaera: astronomici introductorii de spaera epitome*. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa & Fundação Calouste Gulbenkian, 2002 [edição original: Lisboa, 1537; link na Biblioteca Nacional Digital: <http://purl.pt/14445>].
- [4] Pedro Nunes, *Obras, Vol IV: De arte atque ratione navigandi*. Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa & Fundação Calouste Gulbenkian, 2008 [original edition: Basle, 1566; link at the Portuguese Biblioteca Nacional Digital: <http://purl.pt/14448>].
- [5] João Filipe Queiró, "Pedro Nunes e as Linhas de Rumor", *Gazeta de Matemática*, 143 (2002).