GARIMPEIRO MATEMÁTICO

JORGE NUNO SILVA
Universidade
de Lisboa
jnsilva@cal.berkeley.edu

DataGenetics é uma empresa dedicada à análise de grande quantidades de dados. Fundada por Nick Berry, o seu *site* na *web* reflete o carácter do seu presidente, possuidor de uma curiosidade bastante eclética.
O problema de pesagens que apresentamos hoje vem do *blog* da DataGenetics e pede para identificar não um, mas dois objetos.

Todos sabem que as pepitas de ouro têm aspeto tipicamente disforme e variado.

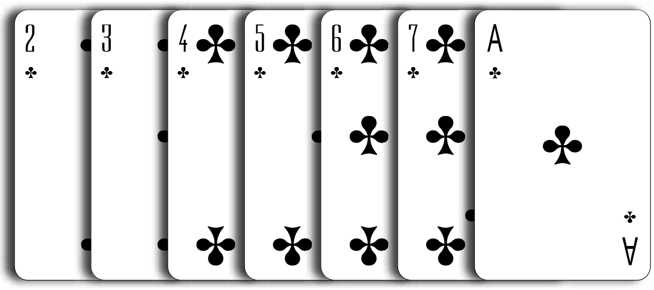
Dadas duas pepitas, não há maneira de decidir sobre qual é a mais pesada a não ser por pesagem.

Suponhamos que temos 16 pepitas, todas com o mesmo peso, exceto uma que é mais pesada do que as outras. Queremos determinar qual é a mais valiosa usando uma balança de pratos. Qual é o menor número de pesagens que devemos efetuar?

Uma solução em três passos começa com a pesagem de cinco pepitas em cada prato da balança. Esta primeira operação permite-nos concluir que a pepita desejada está nas seis que ficaram de fora ou nas cinco do prato que baixou. Mais duas pesagens garantem a identificação da pepita mais rica.

O problema que propomos aos leitores é diferente: suponham que as pepitas têm todas pesos diferentes e que queremos determinar as duas mais pesadas! Em quantas pesagens se pode determinar as duas pepitas mais valiosas?

Relembremos a questão do número anterior.



Há três jogadores, o Andrey, o Boris e o Sergey. As cartas são distribuídas da seguinte forma: três para o Andrey, três para o Boris e uma para o Sergey. Nenhum deles sabe nada sobre a distribuição das cartas, além das que tem na mão. Será possível o Andrey e o Boris terem uma conversa, em voz alta, à frente do Sergey, de forma a que fiquem a conhecer a distribuição das cartas e o Sergey continue a saber somente qual é a sua carta?

No lugar da soma modular poderá usar-se soma--Nim? Relembremos que para efetuar uma destas somas se escreve os números em binário e se usa a tabuada $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. No exemplo acima, o Andrey calcularia $1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$ e diria: "0". O Boris faria a conta $4 \oplus 5 \oplus 6 = 7$ e, sabendo que $1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 7 = 0$, diria: "A carta do Sergey é o 7♣" (já que $7 \oplus 7 = 0$).

O que é que há de errado com este processo?

Ilustremos com um exemplo. Suponhamos que Sergey tem o 3♣ e que Andrey diz "1". Sergey sabe que as únicas combinações de três cartas com soma-Nim 1 são {2♣, 4♣, 7♣}, {2♣, 5♣, 6♣}, {3♣, 4♣, 6♣}, e {3♣, 5♣, 7♣}. Portanto, tendo o terno na mão, Sergey conclui que Andrey tem o duque. Por outro lado, Andrey não pode ter o Ás, porque a equação $1 = 1 \oplus x \oplus y$ é impossível se $x \neq y$. Logo, Sergey sabe que Boris tem esta carta na mão. Somente quando a soma-Nim é nula (sete casos) a ambiguidade permite manter Sergey sem certezas. Em todos os outros casos (28), se ele tiver uma carta diferente da soma de Andrey, pode deduzir uma carta em cada um dos parceiros.

Pode não servir para responder ao problema, mas dá origem a um belo truque de cartas. A divisão 3-3 não é essencial. Basta dar uma carta ao Sergey e dividir as restantes seis pelo Andrey e pelo Boris em qualquer proporção.