

O PONTO DA BAUHÜTTE, ONTEM E HOJE

PEDRO J FREITAS^a E INEZ WIJNHORST^b

^aUNIVERSIDADE DE LISBOA E ^bESAD, FRESS

^apjfreitas@fc.ul.pt e ^binezw@sapo.pt

ALMADA NEGREIROS E LIMA DE FREITAS

O livro *Le Nombre d'Or*, de Matila Ghyka, faz uma recolha de vários elementos geométricos usados na chamada geometria sagrada, isto é, na geometria usada nas construções de igrejas, catedrais e outros espaços de cariz religioso ou espiritual. Nesse livro é citada uma quadra que terá a sua origem numa associação medieval de construtores de catedrais, a Bauhütte. A quadra, transmitida pelo arquiteto Ernest Mössel, é a seguinte:

*Um ponto que está no círculo
E se põe no quadrado e no triângulo.
Conheces o ponto? Tudo vai bem.
Não o conheces? Tudo está perdido.*

Como se vê, a quadra faz referência a este ponto, sem o descrever. Seria uma construção geométrica ou algo com um significado mais simbólico e espiritual? Claramente, a quadra parece ter intenção de guardar o segredo, provavelmente só acessível aos membros da companhia de construtores.

Almada Negreiros, que estudou a geometria ligada à arte durante décadas, tinha o livro de Ghyka na sua biblioteca. Ao encontrar a quadra, encarou-a como um desafio: como se construiria este ponto? Como encontrar o círculo, o quadrado e o triângulo? A sua solução, fixada em 1957, numa pintura abstrata, e em 1969, em pedra, no painel *Começar*, foi a da figura 1.

Apresentamos na figura 2 um esquema da construção. É a linha descendente dourada que determina um ponto na circunferência, a partir do qual se determinam o quadrado e o triângulo, que é reto, com um cateto hori-



Figura 1: Ponto da Bauhütte no painel *Começar*.

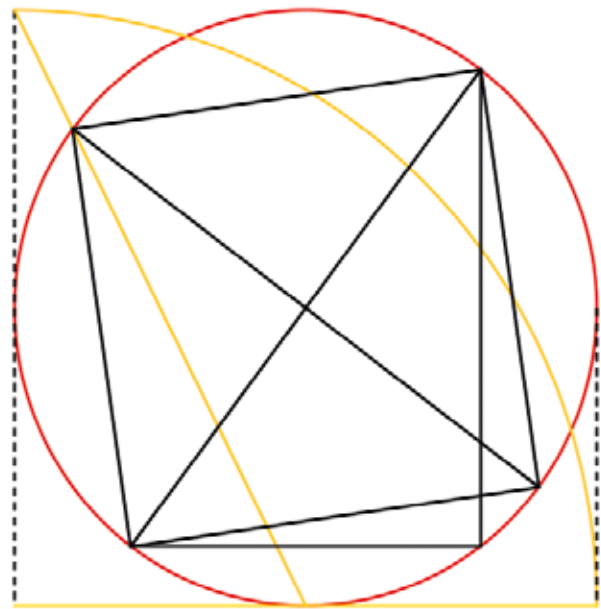


Figura 2: Esquema da construção do Ponto da Bauhütte.

O Ponto da Bauhütte tem maravilhado várias pessoas ao longo dos tempos. Entre nós, demarcam-se dois artistas: Almada Negreiros e Lima de Freitas, que desenvolveram construções geométricas sobre esta ideia. E o seu fascínio não termina: ainda hoje há novidades à volta deste ponto.

zontal e outro vertical.

O que é notável nesta construção é que este triângulo tem proporções 3-4-5. Este era um triângulo já conhecido dos egípcios, que o usavam para determinar ângulos retos, com o auxílio de uma corda com nós (fig. 3) a que Almada faz referência nos frescos do Edifício das Matemáticas na Universidade de Coimbra (executados no mesmo ano que o painel *Começar*).

A figura 4 apresenta um desenho do próprio Almada, do qual se pode deduzir facilmente uma demonstração de que o triângulo obtido no painel *Começar* tem estas proporções. Nesta grelha de dez quadrículas, o ponto de interseção da linha descendente (que não está marcada aqui) com a circunferência é um ponto da grelha – o ponto tem coordenadas (-4,3).¹ Ora, a linha descendente em questão tem declive -2, começando no ponto de coordenadas (-5,5), e a circunferência tem raio de 5 quadrículas; assim, ambas passam neste ponto. Portanto, todos os lados do triângulo estão contidos em linhas da quadrícula e, para saber os seus comprimentos, basta contar quadrículas — medem 6, 8 e 10, o que dá a proporção 3-4-5, como indicado.

Lima de Freitas não ficou satisfeito com esta construção, pois parecia-lhe que o triângulo mencionado na quadra devia ser equilátero. Apresentou então, no livro *Almada e o Número*, outra construção, em que, para além da circunferência, do quadrado e do triângulo, o ponto gera também um pentágono (ainda que seja apenas uma aproximação do pentágono regular). A figura 5 descreve a construção, os três polígonos estão marcados com linha mais grossa.

Nesta construção, começa por se criar um retângulo do lado esquerdo, com uma diagonal descendente, a partir da qual se traçam várias linhas que dão origem aos polígonos. Esse retângulo tem como base um motivo conhecido, a *vesica piscis* (bexiga de peixe), uma figura formada por dois arcos de circunferência, e que aqui determina a posição dos lados superior e inferior do retângulo e dois dos vértices do triângulo.

DESENVOLVIMENTOS RECENTES

A segunda autora deste artigo, que faz trabalho artístico com base geométrica, desenvolveu mais algumas propostas de construções para o Ponto da Bauhütte (segundo Almada), que apresentamos aqui.

Desenhámos na figura 6 todas as linhas que definem os pontos da Bauhütte (por interseção com a circunferência), obtendo o que se chama a *polarização do quadrado*. Nessa grelha de linhas encontramos outro triângulo 3-4-5,

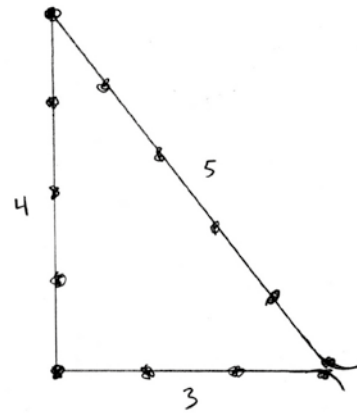


Figura 3: A corda com nós.

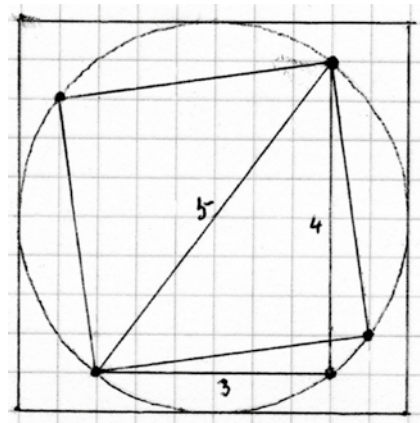


Figura 4: O Ponto da Bauhütte sobre quadrícula.

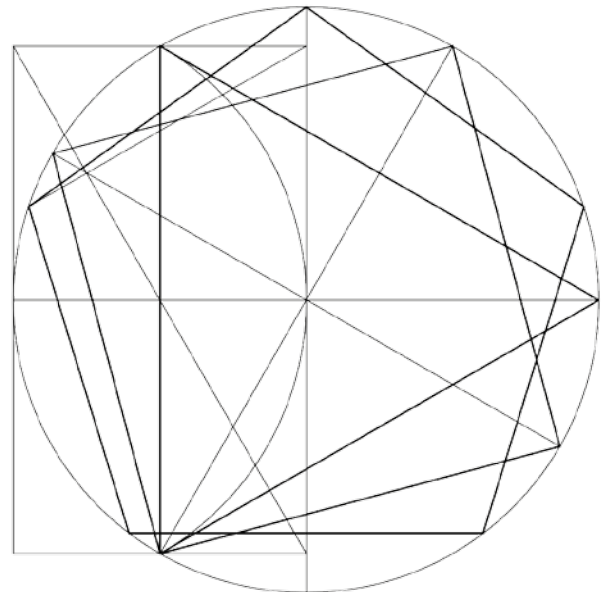


Figura 5: O Ponto da Bauhütte segundo Lima de Freitas.

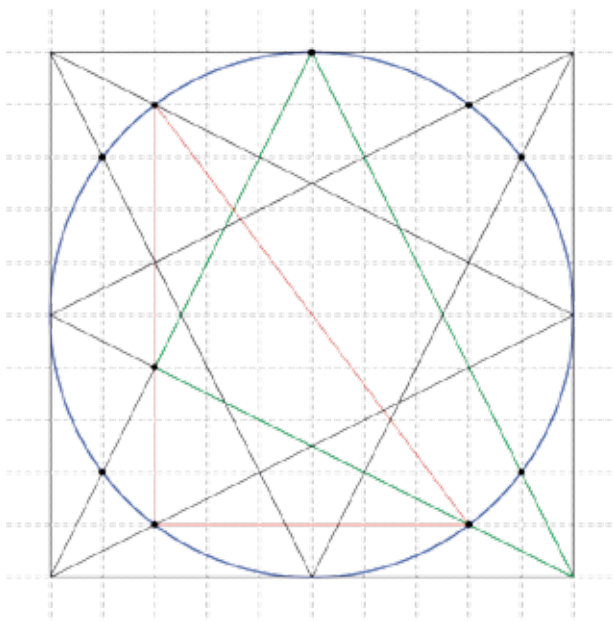


Figura 6: Mais um triângulo 3-4-5.

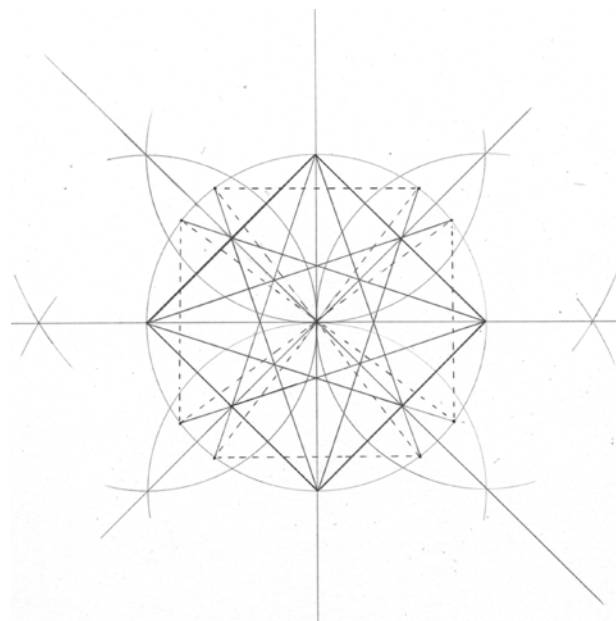


Figura 7: Os pontos da Bauhütte por Inez Wijnhorst.

assinalado a verde.

Já sabemos que o triângulo a vermelho tem proporções 3-4-5. Para verificar que o mesmo acontece com o triângulo verde, basta medir os comprimentos dos seus lados. Depois de verificar que todos os vértices deste triângulo estão sobre pontos da quadrícula, vemos que qualquer dos lados é diagonal de um retângulo, da quadrícula, de proporções 2:1 (isto é, formados por dois quadrados). Portanto, pelo teorema de Pitágoras, medem $\sqrt{5}$ vezes o lado menor dos respetivos retângulos. Observando que estes lados menores medem precisamente 3, 4 e 5, temos o resultado.

Na figura 7 apresentamos uma construção alternativa para os pontos da Bauhütte, desta vez sem o quadrado circunscrito à circunferência.

O protocolo da construção é o seguinte. Divide-se uma circunferência em quatro partes iguais, marcando diâmetros na vertical e na horizontal. Inscreve-se um quadrado com vértices nos extremos destes diâmetros e determinam-se os pontos médios dos lados deste quadrado. Por estes fazem-se passar linhas com origem nos extremos dos dois diâmetros originais, verticais e horizontais. Estas linhas determinam então, por interseção com a circunferência, os pontos da Bauhütte.

Para verificar que os pontos são os mesmos, apre-

sentamos as duas construções sobrepostas na figura 8.

Os pontos da Bauhütte representados têm coordenadas (3,4) e (4,3) e o ponto médio do segmento azul tem coordenadas (2.5, 2.5). Os segmentos vermelhos têm declives 1/3 e 3, considerando-os dirigidos pelos pontos da Bauhütte e pelos pontos de coordenadas (-5,0) e (0,-5), respetivamente. Usando agora proporções, podemos verificar que o ponto médio do segmento azul pertence de facto a ambos os segmentos, justificando assim a construção.

Se desenharmos as semirretas com origem no centro da circunferência, passando pelos pontos da Bauhütte, como na figura 9, determinamos estes pontos em qualquer circunferência concêntrica à primeira. Além disso, a sua interseção com os lados do quadrado (a negro) permite-nos desenhar outras circunferências igualmente interessantes, todas com o mesmo raio, aqui marcadas a vermelho e uma ao centro a azul. Usando novamente proporções, e as coordenadas dos pontos da Bauhütte, é simples verificar que o raio destas circunferências é 5/4.

¹ Sempre que apresentarmos um referencial sobre uma quadrícula com uma circunferência, o centro do referencial será o centro da circunferência e o lado da quadrícula será a unidade de comprimento.

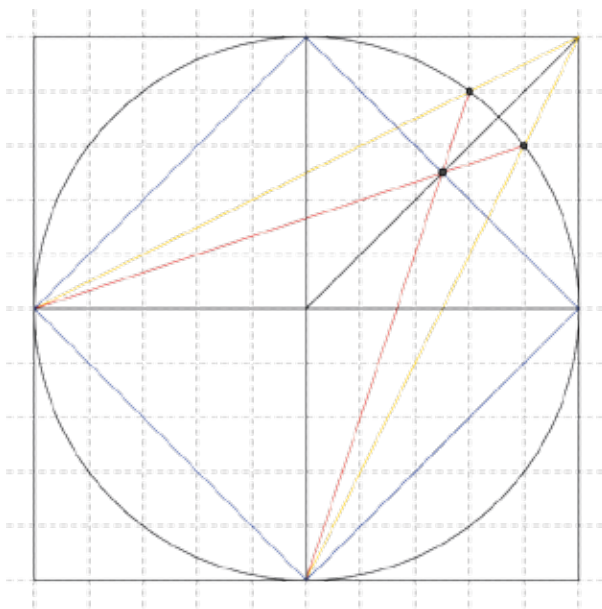


Figura 8: Os dois métodos comparados.

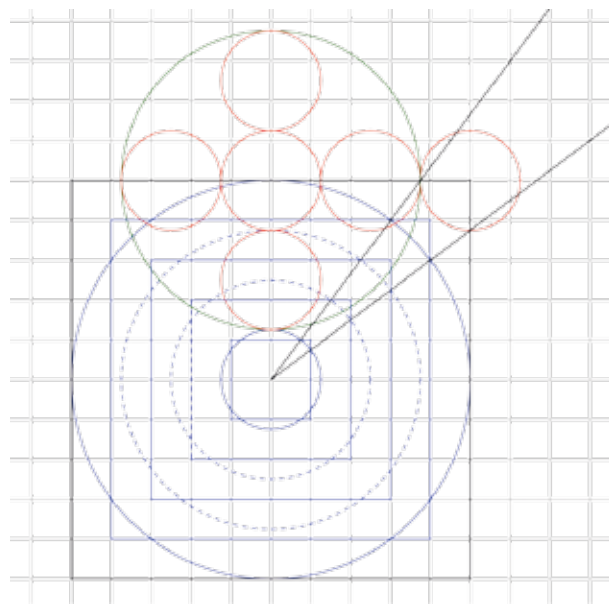


Figura 9: Semirretas dos pontos da Bauhütte.

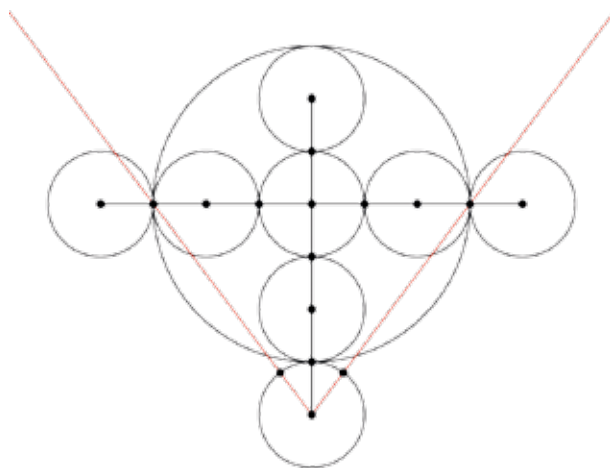


Figura 10: Oito circunferências em cruz.

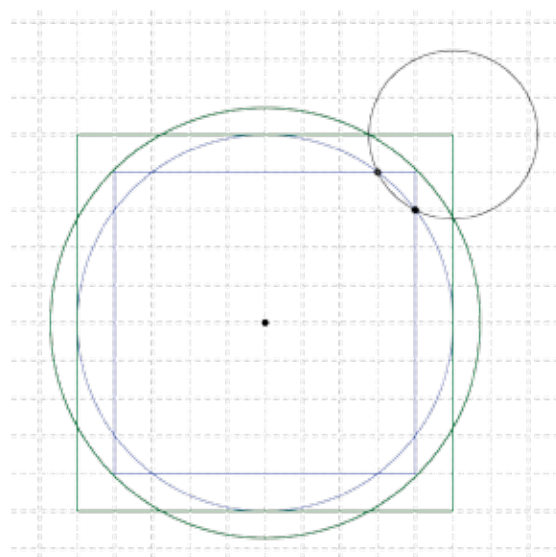


Figura 11: Aproximações das quadraturas.

Vemos que, considerando a pequena circunferência ao centro, as semirretas passam justamente nos pontos de interseção desta com o quadrado de lado 2. Ou seja: nos quatro conjuntos azuis concêntricos circunferência/quadrado, em que os raios das circunferências são múltiplos do raio das circunferências vermelhas, a interseção dá os pontos da Bauhütte.

Esta constatação permite encontrar uma nova cons-

trução para estes pontos, baseada apenas no desenho repetido, nos eixos verticais e horizontais, de uma circunferência com um diâmetro fixo. A figura 10 ilustra este processo.

Os pontos marcados na circunferência em baixo são os pontos da Bauhütte. Note-se que os raios das circunferências pequenas marcam as medidas 3 e 4 nos catetos do triângulo, com hipotenusa contida na semirreta

a vermelho, recuperando assim o triângulo 3-4-5. As circunferências nos extremos do segmento horizontal permitem marcar o quadrado inicial, com uma grelha de dez unidades de lado: os centros das circunferências são os vértices deste quadrado.

APROXIMAÇÕES

Dois pontos da Bauhütte consecutivos (como os da figura 8) determinam um ângulo de $16,26^\circ$, que é uma boa aproximação da 22.^a parte da circunferência, $16,36^\circ$, com erro de 0.6%. Já Almada Negreiros tinha notado este facto. Além disso, o outro ângulo definido por estes pontos na circunferência, cerca de $343,74^\circ$, dá uma muito boa aproximação de seis radianos, que correspondem a $343,77^\circ$ — o erro é de 0.009%!

Os pontos da Bauhütte fornecem também uma aproximação de quadraturas do círculo, veja-se a figura 11.

Para uma quadratura em termos de perímetros, consideremos as figuras a azul, o quadrado e a circunferência, que se interseam nos pontos da Bauhütte. Tomando como unidade o lado da quadrícula, o perímetro do quadrado é 32 e o perímetro da circunferência é 31.42, o que representa um erro de 1.8%.

Com estes pontos podemos determinar também uma quadratura aproximada em termos de áreas, ilustrada pelas figuras a verde (a circunferência a preto é auxiliar: passa nos pontos da Bauhütte e determina um ponto de passagem da circunferência a verde). A circunferência tem área aproximada de 102.54, o quadrado tem área 100, o que corresponde a um erro de 2.5%.

Finalmente, a construção da figura 12, baseada numa pavimentação do plano com quadrados e triângulos (que são os dois polígonos referidos na quadra), dá uma boa aproximação dos pontos da Bauhütte. O ângulo entre o ponto exato e o ponto determinado por esta construção, tendo como referência o centro da circunferência, é $0,66^\circ$. Os pontos, que estão todos sobre a mesma circunferência (dada a simetria da construção), estão marcados a verde e a vermelho na figura, o centro da circunferência seria o ponto central, a azul.

Terminamos com a figura 13, que é um registo artístico dos elementos envolvidos na construção destes pontos aproximados.

SOBRE OS AUTORES

Pedro J. Freitas é Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Para além do trabalho de regência de cadeiras e investigação em matemática, fundamentalmente em áreas de álgebra, dedica-se também a assuntos de divulgação e de interação entre matemática e arte — em particular, colabora há alguns anos no estudo da obra geométrica de Almada Negreiros, no âmbito do projeto Modernismo Online.

Inez Wijnhorst é licenciada em Pintura pela Faculdade de Belas Artes da Universidade de Lisboa (1996). Desenvolve a seu trabalho nas disciplinas de Gravura, Desenho, Pintura e Geometria. Foi distinguida com vários prémios dos quais se destacam: Bronze Award no Print Art Triennale em Osaka, Japão (1997) e o Prémio Amadeo de Souza-Cardoso em Amarante, Portugal (1999).

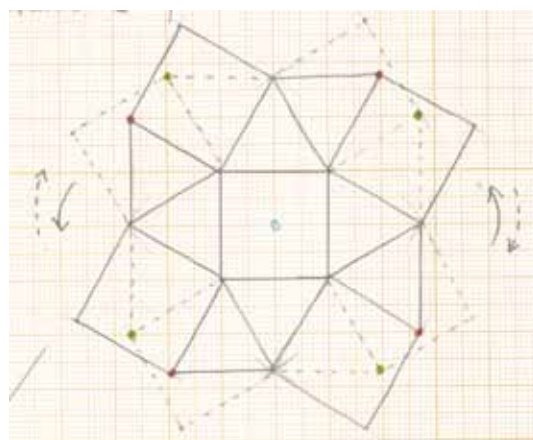


Figura 12: Construção aproximada para os pontos da Bauhütte.

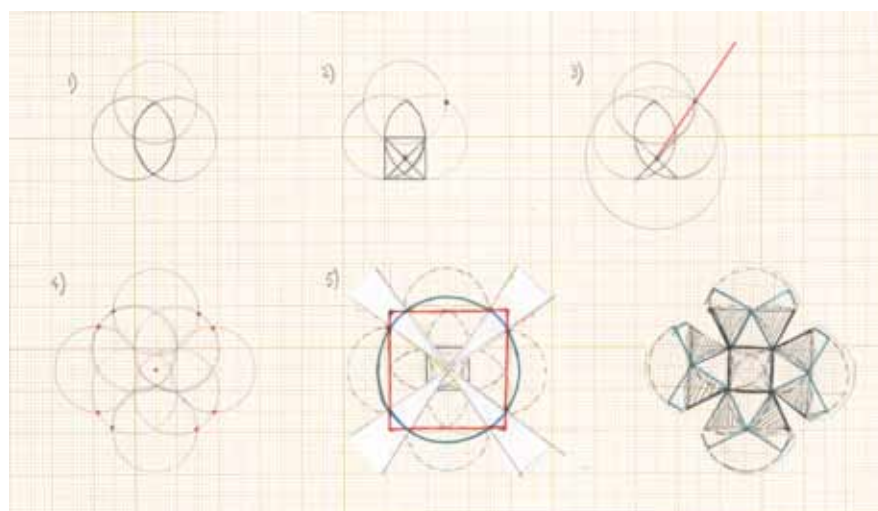


Figura 13: Evoluções da construção aproximada dos pontos da Bauhütte.