Algebras de Boole e análise de circuitos

por M. S. Leavitt

Devemos a publicação desta tradução à amabilidade, que agradecemos, do autor e do jornal «Blue Print», revista publicada pelos estudantes do «College of Engineering and Architecture» da Universidade de Nebraska, onde o artigo foi originalmente publicado no volume LII, N.º 5 de Outubro de 1952, pag. 13, 14 e 28.

A Redacção

1. Introdução. Num inquérito entre engenheiros torna-se imediatamente aparente a importância fundamental da matemática, quer como instrumento, quer como uma fonte de ideias. A indústria americana é tradicionalmente progressiva e dinâmica e o engenheiro, quer procure pequenos mas importantes melhoramentos em planos e técnicas, quer pertença ao grupo, ràpidamente crescente, dos homens de investigação e desenvolvimento, encontra na matemática um instrumento indispensável.

O tipo de matemática que o engenheiro usa depende, evidentemente, do problema particular que deseja atacar. O matemático puro está interessado, em particular, naqueles ramos da matemática que estão em processo de desenvolvimento, enquanto que o engenheiro, cujo interesse se foca na resolução de um problema, usará aquele tipo de matemática de que no momento necessite. Se a álgebra, a trigonometria ou mesmo a simples aritmética lhe chegam, não precisa de se desculpar por apenas fazer uso delas. Estas técnicas simples são, de facto, o suficiente para a maioria das aplicações industriais. Ramos «mais avançados» da matemática tais como a teoria das equações diferenciais lineares, etc. vão-se tornando cada vez mais comuns. As chamadas matemáticas superiores estão ràpidamente perdendo esta categoria. O Dr. H. M. Evjen, físico investigador da secção geofísica da «Shell Oil Company» diz:

«Evidentemente que matemáticas superiores significam simplesmente aqueles ramos da ciência que não encontraram ainda um vasto campo de aplicação e portanto, digamos, ainda não emergiram da obscuridade. É pois um termo temporário e subjectivo».

É assim que encontramos (*) a teoria das funções duma variável complexa ao tratarmos da teoria do potencial e transmissões ondulatórias, da propagação de correntes em fios, de campos gravitacionais e electromagnéticos, da pesquisa de óleo, e nos projectos de filtros e equalisadores para sistema de comunicações. Também a teoria das séries de Fourier e outras séries ortogonais é usada em problemas sobre a propagação do calor, na passagem de correntes em linhas de transmissão, deformação e vibração de gases, líquidos e sólidos elásticos, etc. A álgebra de matrizes é aplicada no estudo das máquinas eléctricas rotativas, no estudo da vibração das asas de aviões e nos problemas de equivalência na teoria do circuito. Mesmo a teoria dos números é usada no projecto de redução de engrenagens e no desenvolvimento dum método sistemático para entrelaçamento de cabos telefónicos. Esta lista, que poderia extender-se quase indefinidamente, é de certo suficiente para ilustrar a capacidade de aplicação da matemática às modernas investigações e desenvolvimentos industriais. Tem mesmo acontecido que novas noções de matemática, jà esquecidas por matemáticos puros, foram desenvolvidas em conecção com problemas de engenharia.

(*) As aplicações aqui referidas fazem parte duma lista dada no relatório do «National Resources Planning Board», publicado em «Industrial Research» (1940). Uma lista actualisada seria de certo tremendamente ampliada.

O ramo das matemáticas mais ìntimamente ligado com as aplicações industriais é o das «matemáticas aplicadas». O próprio matemático puro está profundamente interessado na descoberta de aplicação duma teoria, embora originalmente ela tenha sido desenvolvida simplesmente pelo seu interesse teórico. Sublinhando a «importância» duma teoria e atraindo trabalhadores para este campo, pode-se estimular consideràvelmente o seu desenvolvimento e isso tem sucedido várias vezes. De facto, o matemático tem sido muitas vezes surpreendido ao notar que uma teoria que ele considerava como excepcionalmente abstracta foi apropriada e usada por algum jóvem e brilhante engenheiro.

2. Álgebras de Boole. Um caso dessa natureza envolvendo o uso do ramo da álgebra abstracta moderna chamado «álgebras de Boole», é o que vai ser discutido neste artigo. Esta aplicação particular (à simplificação de electro-imans e de mudanças de circuitos) foi sistemàticamente estudada por Claude Shannon (*) ao tempo um investigador assistente do

(*) «Uma análise simbolica dos electro-imans e mudanças de circuitos», A. I. E. E. Transactions, vol. 57 (1038) pp. 713-723.

M. I. T. (Massachussets Institute of Technology) e agora dos laboratórios da «Bell Telephone».

Esta técnica tem sido extensivamente empregada na análise do contrôle dos circuitos protectores de sistemas eléctricos complexos tais como os que se encontram em ligações telefónicas automáticas, no equipamento industrial de contrôle de motores e efectivamente em muitos dos circuitos utilisados para efectuar automàticamente operações complexas. Em tais casos esta análise ajuda extraordinàriamente a obter um método sistemático de projectos e, mesmo mais, a obter um meio sistemático de simplificar em certos casos um circuito com características especiais no melhor circuito equivalente (no sentido de ter o menor número possível de ligações e pontos de contacto).

Antes de discutirmos a sua aplicação à teoria do circuito será preferível dar uma definição breve de álgebra de Boole e desenvolver alguns teoremas que são usados nas aplicações. Tal como qualquer das muitas outras possìveis álgebras, a álgebra de Boole é um sistema de elementos $(x, y, z, \cdots)$ e certas operações $(+ \text{ e } \cdot)$, obedecendo a um conjunto de postulados preestabelecidos. Estes são os seguintes: [a numeração está de acôrdo com a de Shannom]
as leis comutativas

(1 a) $x + y = y + x$ (1 b) $x \cdot y = y \cdot x$,

as leis associativas

(2 a) $x + (y + x) = (x + y) + z$

(2 b) $x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot z$,

a primeira lei distributiva

(3 a) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Note-se que até aqui estas regras são precisamente as das álgebra ordinária. O seguinte postulado (a segunda lei distributiva) é contudo diferente:

(3 b) $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$.

Suponhamos ainda que há no sistema dois elementos especiais, chamados 0 e 1, e obedecendo aos postulados

(4 a) $0 + x = x$

(4 b) $1 \cdot x = x$

(5 a) $1 + x = 1$

(5 b) $0 \cdot x = 0$

É postulado ainda, que para cada x há um único elemento x' tal que:

(6 a) $x + x' = 1$

(6 b) $x \cdot x' = 0$

Escrevendo (6a) e (6b) em ordem inversa, é claro que

(8) $(x')' = x$,

enquanto que de $0 + 1 = 1$ e $0 \cdot 1 = 0$ [(4a) e (4b)] se segue

(7 a) $0' = 1$

(7 b) $1' = 0$

Finalmente, temos os postulados

(14 a) $x + x = x$

(14 b) $x \cdot x = x$

Note-se que nos postulados anteriores para cada lei estabelecida corresponde uma outra obtida pela troca do sinal $+$ com $\cdot$ e 0 com 1. Isto conduz ao princípio de «dualidade» que diz que a cada teorema da álgebra de Boole corresponde um «teorema dual» obtido por meio de tal troca. O trabalho do desenvolvimento da teoria está, assim, reduzido precisamente a metade.

Usando as leis distributivas [(3a) e (3b)] verifica-se fàcilmente que

$$(x + y) \cdot (x' \cdot y') = 0 \quad \text{e} \quad (x + y) + (x' \cdot y') = 1,$$

donde pela definição (6) do elemento x' temos (lei de Morgan)

(9 a) $(x + y)' = x' \cdot y'$

e a sua dual

(9 b) $(x \cdot y)' = x' + y'$.

Antes de continuarmos com outros teoremas, ou com as aplicações à teoria do circuito é, talvez, instrutivo dar a aplicação deste sistema abstracto à chamada álgebra de lógica. Esta aplicação particular, foi de facto, o que conduziu originalmente George Boole (à volta de 1850) a inventar esta álgebra. A ilustração dá, além disso, um sistema análogo ao encontrado na teoria do circuito. Na álgebra de lógica, as variáveis $x, y, z \cdots$ são interpretadas como proposições; isto é, são asserções (verdadeiras ou falsas) a respeito de qualquer coisa. A proposição combinada $x \cdot y$ definir-se-á como a proposição «ambos x e y» enquanto que $x + y$ é interpretada como «ou x ou y». O elemento x' significará a negativa da proposição x. Finalmente, como condição especial requerer-se-á que cada variável tomará unicamente os valores 0 e 1 onde 0 é interpretado como falsidade e 1 como verdade. Um momento de reflexão convencerá que este sistema satisfaz os postulados anteriores. Por exemplo, a proposição $x+y$ (que afirma x ou y) é verdadeira se x é verdadeiro independentemente de que y o seja. [isto é, $1+y=1$, como em (5a)]. Outro exemplo: o enunciado, que afirma uma preposição e a sua negativa, é sempre falso (isto é $x \cdot x' = 0$).

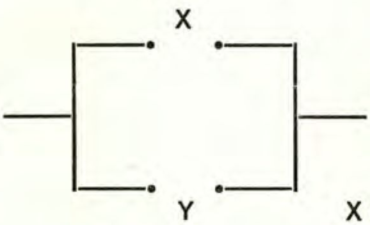
A teoria das álgebras de BOOLE tem sido aplicada a muitas outras teorias tais como a teoria dos conjuntos, teoria das probalidades, etc.

3. Álgebra de BOOLE aplicada a análise do circuito.

Os únicos circuitos aqui considerados são aqueles que contém comutadores e interruptores tais que o circuito entre dois quaisquer extremos é ou aberto ou fechado. Portanto, como na álgebra de lógica, cada variável (representando um circuito do sistema) toma um dos dois valores 0 ou 1.

Dois dos circuitos podem ser combinados ligando-os ou em série ou em paralelo. Um circuito obtido pela ligação dos circuitos x e y em série designar-se-á por $x+y$, e a ligação em paralelo de x e y designar-se-á por $x \cdot y$

X + Y



X · Y

Uma pequena reflexão convencer-nos-á que este sistema também satisfaz os postulados de BOOLE anteriormente enunciados. Como exemplo daremos a interpretação, em termos de circuito, dos postulados que contém 0 e 1. [(4a), (4b), (5a), (5b)].

Interpretação

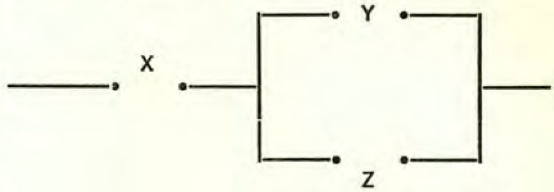
$1+x=1$ Um circuito aberto em série com outro circuito é sempre um circuito aberto.

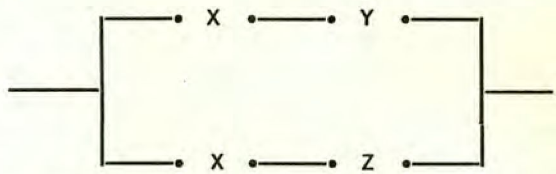
$0 \cdot x=0$ Um circuito fechado em paralelo com outro circuito é sempre um circuito fechado.

$0+x=x$ Se um circuito fechado está em série com um circuito x, o resultado depende de x [fechado se x é fechado, aberto se x é aberto].

$1 \cdot x=x$ Se um circuito aberto está em paralelo com um circuito x o resultado depende de x.

Das interpretações anteriores, é claro que x' deve ser um circuito que está ligado de modo que quando x é fechado x' é aberto e reciprocamente. Em qualquer sistema complexo pode suceder que vários circuitos estejam ligados de modo a serem abertos ou fechados conforme o circuito x é aberto ou fechado; em tal caso esse circuito será chamado x. Reciprocamente qualquer circuito que seja o inverso de x chamar-se-á x'. Convida-se o leitor a verificar por si próprio os restantes postulados e teoremas dados atrás. Por exemplo vê-se que os dois circuitos





são equivalentes. Portanto $x+y \cdot z = (x+y) \cdot (x+z)$.

Alguns teoremas adicionais são extremamente úteis para obter simplificações. As provas são muitas vezes muito simples; por exemplo

(15 a) $\quad x+x \cdot y = x \cdot 1 + x \cdot y = x \cdot (1+y) = x \cdot 1 = x$.

Donde o seu dual pode ser imediatamente escrito sob a forma

(15 b) $\quad x \cdot (x+y) = x$.

Um último teorema que é de natureza mais geral: Seja $f(x, y, z, \cdots)$ uma função de BOOLE das variáveis $x, y, z, \cdots$ então

(17 a) $\quad x \cdot f(x, y, z, \cdots) = x \cdot f(1, y, z, \cdots)$.

Isto é, se multiplicarmos x por uma função, o resultado é o mesmo que se obtem se cada vez que x aparece na função ele é substituido por 1 (e evidentemente x' por 0).

Para justificar este teorema note-se, em primeiro lugar, o possível carácter duma função de BOOLE. Desde que $x \cdot x = x$ e $x \cdot x' = 0$, segue-se que x pode aparecer no máximo uma vez em cada produto. Agora para cada termo com um sinal interior $+$ pode ser usada a lei distributiva (3 a) para obter a soma de dois termos [por exemplo, $x \cdot z \cdot (x+y') = x \cdot z + z \cdot y' \cdot z$]. Por repetições deste processo chega-se eventualmente a uma «étape» tal que

$f(x, y, z, \cdots)$ fica expresso simplesmente como uma soma de termos, cada um dos quais é um produto de algumas ou todas as variáveis $x, y, z, \cdots$ (como ou sem $'$). Por exemplo, seja $f(x, y, z) = y \cdot (x' + (x + y) \cdot z') = y \cdot (x' + x \cdot z' + y \cdot z') = x' \cdot y + x \cdot y \cdot z' + y \cdot z'$. Donde claramente $x \cdot f(x, y, z, \cdots)$ eliminará todos os termos envolvendo x' e assegurará um x colocado em todos os restantes termos. Portanto, para a função no exemplo, anterior $x \cdot f(x, y, z) = x \cdot (x' \cdot y + x \cdot y \cdot z' + y \cdot z') = x \cdot y \cdot z' + x \cdot y \cdot z' = x \cdot y \cdot z'$.

Mas $x \cdot f(1, y, z)$ semelhantemente elimina todos os termos envolvendo x'. Por as duas expressões $x \cdot f(x, y, z, \cdots)$ e $x \cdot f(1, y, z, \cdots)$ são uma mesma como queriamos provar. [No exemplo anterior $f(1, y, z) = 0 \cdot y + 1 \cdot y \cdot z' + y \cdot z' = y \cdot z' + y \cdot z' = y \cdot z'$ e portanto $x \cdot f(1, y, z) = x \cdot y \cdot z'$]. O teorema dual é

(17 b) $\quad x + f(x, y, z, \cdots) = x + f(0, y, z, \cdots)$.

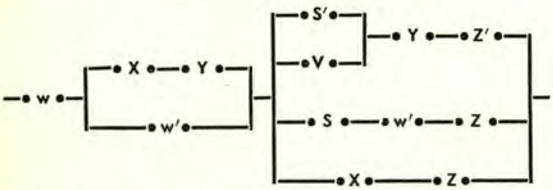
Desde que $x = (x')'$, a função $f(x, y, z, \cdots)$ pode também ser olhada como uma função de $x', y, z, \cdots$ Portanto (17 a) pode ser usada para provar que

(18 a) $\quad x' \cdot f(x, y, z, \cdots) = x' \cdot f(0, y, z, \cdots)$

com a sua dual

(18 b) $\quad x' + f(x, y, z, \cdots) = x' + f(1, y, z, \cdots)$.

Os quatro teoremas anteriores são especialmente úteis na simplificação de circuitos. Como exemplo considere-se o seguinte circuito:



A função representando o circuito pode ser escrita imediatamente como $w + w' \cdot (x + y) + (x + z) \cdot (s + w' + z) \cdot (s' \cdot v + y + z')$.

Usando (17 b) com w como variável especial, [isto é, $w + f(x, y, z, w, \cdots) = w + f(x, y, z, 0, \cdots)$] esta função é igual a

$$w + 0' \cdot (x + y) + (x + z) \cdot (s + 0' + z) \cdot (s' \cdot v + y + z').$$

Mas desde que $0' = 1$ e $1 + s + z = 1$, será igual a

$$w + x + y + (x + z) \cdot (s' \cdot v + y + z').$$

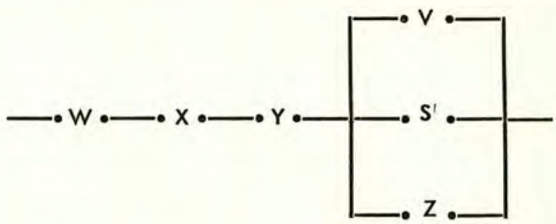
Semelhantemente, usando (17 b), primeiro com x e depois com y temos:

$$w + x + y + z \cdot (s' \cdot v + y + z') = w + x + y + z \cdot (s' \cdot v + z').$$

E pela lei distributiva (3 a)

$$= w + x + y + z \cdot s' \cdot v.$$

Portanto um circuito equivalente muito mais simples:



Muitos outros problemas da teoria do circuito, tais como a simplificação de circuitos com operações de sequência, a construção de circuitos selectivos com características especiais, etc., podem ser tratados por métodos semelhantes. Para uma maior discussão destes problemas, ver o artigo de Shannon atrás citado. Vários investigadores russos têm trabalhado consideràvelmente neste problema.

Tradução de Maria Pilar Ribeiro.

Exemplo de conjunto não mensurável á Lebesgue

Do Prof. Ruy Luiz Gomes recebeu a Redacção uma carta em que chama a atenção para o erro em que pode induzir o título dado ao artigo que nos enviou para o n.º 51 do *G. M.* Tal como se diz nas palavras de introdução, esse artigo é apenas uma transcrição, acrescentada de todas as demonstrações, do *capítulo VII, intitulado Nonmeasurable Sets, das lições dadas por J. von Neumann no Institute for Advanced Study Princeton, nos anos lectivos de 1933-34 e 1934-35* (1).

(1) John von Neumann — *Functional Operators*, Vol. I: *Measures and Integrals*, Princeton University Preess, 1950.