

Conclusões e Recomendações do Simpósio Internacional sobre o Ensino Escolar da Matemática (*)

1. LA MATIERE A ENSEIGNER

1.1 Conditions de l'organisation d'un enseignement moderne de la mathématique.

1.11 *Horaires consacrés à la mathématique*

1.111 L'enseignement efficace de la mathématique exige un temps suffisant. Les participants demandent qu'une branche aussi fondamentale dispose, comme elle le fait déjà dans la majorité des pays, d'horaires allant de 4 à 6 heures par semaine, dans toutes les classes générales d'enseignement secondaire, à l'exclusion des classes scientifiques ou techniques où ils doivent être plus étendus.

1.112 Des expériences doivent être faites pour déterminer, selon l'âge des élèves, le niveau des classes, les méthodes employées et le type d'école, quelle est la répartition du temps consacré à l'enseignement qui permet la meilleure assimilation tout en ne surchargeant pas les élèves.

1.12 *Conditions de travail en classe*

1.121 Les conditions humaines doivent être réalisées pour que l'atmosphère des classes de mathématique soit aussi stimulante que possible.

1.122 Les effectifs resteront dans des limites adéquates. L'effectif optimum se situe entre 15 et 25 élèves. Si, par suite de la pénurie d'enseignement ou pour d'autres raisons, cette recommandation ne pouvait être observée, l'organisation de séances de travail par groupes restreints est vivement recommandée.

1.123 On étudiera les effets du travail individualisé et par groupe permettant, à chaque élève, de progresser à son rythme propre au sein de la collectivité de la classe.

1.2 Matière de l'enseignement.

1.21 *Tronc commun*

1.211 Au début des études, il importe que les notions de base de la mathématique soient enseignées à tous les enfants.

1.212 Il convient, dans toute la mesure du possible, que le premier enseignement soit fait, dans chaque pays, d'après un programme unique, sans empêcher l'expérimentation

(*) Realizado em Budapest, pela Comissão Nacional Húngara para a UNESCO e pelo Ministério da Cultura, com o concurso da Associação de Matemática «BOLYAI JÁNOS» e apoio da UNESCO, Setembro 1962.

avec de nouveaux programmes et l'introduction éventuelle et progressive d'un nouveau programme unique.

1.213 Sur ce tronc commun, se grefferont des développements et des compléments spécifiques.

1.22 *Résultats acquis relatifs aux concepts de base.*

1.221 Des expériences nombreuses ont montré qu'il était possible d'utiliser le langage, les notions et les opérations ensemblistes élémentaires, les notions de relation et de fonction dès 12 ans (et même auparavant).

Il est souhaitable d'utiliser ces notions qui facilitent notamment l'étude ultérieure des éléments de topologie et d'analyse.

1.222 Des expériences ont montré également qu'il est possible et souhaitable d'introduire, dès 12 ans, les notions nécessaires ou favorables à la présentation rationnelle de la structure d'espace vectoriel (équivalence, translation, vecteurs, notion de groupe...) de manière à permettre l'étude et l'utilisation des espaces vectoriels dès l'âge de 15 ans.

1.23 *Investigations sur les matières à enseigner.*

1.231 A côté d'un approfondissement des recherches relatives à l'enseignement des ensembles, des espaces vectoriels et des notions connexes, il y a lieu de poursuivre des expériences sur les thèmes généraux suivants, présentés dans le contexte de la mathématique moderne :

éléments de topologie
géométrie élémentaire
notions de statistique et de probabilité,
calcul différentiel et intégral
logique mathématique.

1.232 Chacune de ces matières fera l'objet de recherches à plusieurs niveaux d'âges et dans divers types d'écoles de façon que l'on puisse trouver à quel moment et par quelles méthodes on peut les introduire.

1.233 Il est important d'examiner, dans quelle mesure la méthode axiomatique peut être introduite comme instrument fondamental de l'investigation scientifique.

1.234 La polyvalence pratique de la mathématique doit être mise en plein lumière par ses applications concrètes multiples. Il est de toute utilité de constituer, avec la collaboration des spécialistes, des recueils de problèmes relatifs aux techniques actuelles et sciences physiques, biologiques et sociales.

1.3 Expériences

1.31 *Nécessité de l'expérimentation.*

1.311 Un éventail d'expériences, à petite et à grande échelle, peut assurer l'introduction rapide d'améliorations dans les programmes.

1.312 Les expériences doivent porter sur diverses matières afin de contribuer à leur sélection objective et leur distributions dans les programmes.

1.32 *Classes expérimentales-pilotes*

1.321 Il est indispensable de mettre sur pied, dès le premier enseignement, à tous les niveaux et dans les divers types d'écoles, des classes expérimentales-pilotes.

1.322 L'organisation de ces classes doit être réalisée dans de bonnes conditions quant aux choix des maîtres, à la valeur des programmes et des méthodes, ainsi qu'au climat général dans lequel le travail expérimental a lieu.

1.323 Une expérience bien faite fournira toujours un résultat utile, qu'il soit positif ou négatif. Dans ce dernier cas, pour assurer l'objectivité scientifique de l'expérience, il convient de prémunir ceux qui la conduisent contre tout reproche injustifié.

1.324 Le sort des élèves engagés dans expérience doit être l'objet d'une sollicitude particulière. Il faut prévoir pour eux le programme des années suivantes afin d'assurer la continuité de leurs études. D'autre part, on doit prendre en considération l'existence des classes-pilotes dans le choix des matières des examens et, notamment, des examens d'entrée aux écoles supérieures.

1.33 *Comptes rendus d'expériences*

1.331 Des comptes rendus objectifs des expériences pédagogiques sont indispensables.

Sur la base des résultats obtenus, on peut déterminer des voies à suivre, et les erreurs à éviter.

1.332 Il importe que des documents significatifs soient publiés à ce sujet et distribués aux États membres.

2. PEDAGOGIE DE LA MATHÉMATIQUE

2.1 Démarches relatives à l'apprentissage mathématique

L'apprentissage de la mathématique pour être accompli doit conduire l'élève à effectuer diverses démarches mentales :

Acquérir des structures mathématiques
Prendre conscience de leurs propriétés relationnelles

Exprimer ces propriétés par différents moyens (schémas, langage ordinaire, notations symboliques, etc.).

Reconnaître et établir des liaisons logiques entre ces relations

Organiser ces structures dans un édifice déductif

Résoudre des problèmes mathématiques

Utiliser les structures dans les applications comme modèles mathématiques de situations concrètes

Exercer l'imagination créatrice dans le domaine mathématique.

2.2 Conditions favorables à l'apprentissage de la mathématique

L'expérience des professeurs et les recherches expérimentales des pédagogues établissent les faits suivants :

2.21 L'enseignement doit faire appel à l'intelligence naturelle de l'élève et non se borner à le conditionner à des techniques de pure routine, vite oubliées et peu susceptibles d'adaptation ou de transfert.

2.22 L'activité personnelle d'élève est indispensable à l'épanouissement de ces dispositions potentielles.

2.23 L'apprentissage efficace est favorisé lorsque l'on présente à l'élève des situations pédagogiques qui lui sont familières et qui lui permettent de les mathématiser en faisant ses propres découvertes et en travaillant à son rythme personnel.

2.24 Les situations d'apprentissage d'une discipline aussi organisée que la mathématique doivent être choisies et réparties de telle sorte que l'élève acquière progressivement une pensée structurée et un dynamisme mental efficace.

2.3 Motivation de l'apprentissage

2.31 Une motivation suffisante est un des moteurs de l'apprentissage actif.

2.32 Des recherches doivent être entreprises pour trouver, suivant les élèves, leurs

dispositions et leur âge, quelles sont les motivations qui peuvent les engager vraiment dans l'activité mathématique :

esprit ludique
 intérêt aiguisé par le choix personnel
 applications intéressantes et multiples
 de la mathématique
 combativité suscitée par les problèmes
 satisfaction en cas de réussite personnelle
 d'un problème
 esprit de compétition (concours et olympiades)
 prise de conscience de la pensée mathématique
 évolution historique de cette pensée
 beauté rationnelle de la mathématique.

2.33 Des divers moyens de motivation, tant intérieurs qu'extérieurs à la mathématique, comportent tous un caractère affectif.

2.34 Il y a lieu d'étudier le rôle de l'affectivité dans l'apprentissage de la mathématique. On peut déjà remarquer que dans un enseignement où de bonnes conditions affectives sont réalisées et où l'élève a la joie de sa propre activité mathématique, celle-ci peut trouver sa motivation en elle-même.

2.4 Voies et moyens d'apprentissage

Les voies de l'apprentissage de la mathématique sont multiples :

activité sur le concret et activité figurative à propos d'une situation
 exposé du maître
 travail de résolution de problèmes (individuel ou par groupe)
 travail personnel de recherche
 discussion
 lecture de textes mathématiques, films mathématiques

étude à l'aide de machines à enseigner exposé par télévision.

Il y a lieu d'étudier les apports et les dangers respectifs de ces moyens et de rechercher comment, suivant le niveau des élèves, les matières en cause et les circonstances, il convient de les mettre en oeuvre.

2.5 Le développement de la pensée mathématique

2.51 *Problèmes de la conceptualisation*

2.511 L'expérience de l'enseignement montre qu'une initiation mathématique doit prendre appui sur les notions dégagées des situations, concrètes ou abstraites, familières, à l'élève. Ces situations sont à prendre dans la vie et le milieu ou dans des matériels fabriqués se prêtant à des structurations (réglottes et blocs, films, «games», etc.).

2.512 Pour préciser, par l'expérience mentale, une notion à transmettre, il y a lieu de présenter, en suffisance, des situations variées fournissant des exemples et des contre-exemples.

2.513 La construction de schémas représentatifs de situations (diagrammes de VENN, graphes, tableaux, etc.) offre un moyen d'extraire les notions des situations initiales et de les rendre perceptibles sous une forme non verbale.

2.514 Les erreurs des élèves révèlent les défauts d'intégration de leurs idées mathématiques. Une analyse de ces erreurs fournit souvent des indications sur le cheminement de l'apprentissage.

2.515 Il y aurait lieu d'étudier les aspects psychologiques de la dynamique des concepts (généralisation, spécialisation, analyse, synthèse, etc.).

2.52 Les démonstrations dans l'enseignement

Un effort tout particulier doit être poursuivi pour élucider l'initiation aux démonstrations mathématiques.

Des recherches doivent être faites notamment pour répondre aux questions suivantes :

2.521 Comment mettre en évidence le rôle actif, opératoire, de celui qui recherche, trouve ou expose une démonstration ainsi que le passage du plan d'attaque initial à la méthode analytique ?

Comment présenter les démonstrations ? Dans la langue véhiculaire ou à l'aide de films ou de suites de schémas en couleurs qui soulignent et soutiennent les étapes de la pensée au cours de la déduction ?

Quels sont les avantages ou les inconvénients liés aux éléments perceptifs mis en jeu dans une démonstration ?

Y a-t-il des thèmes où les premières démonstrations se présentent plus simplement, dans une matière mathématiquement claire ?

2.522 Comment entraîner les élèves à la démonstration ?

Y a-t-il des secteurs où ils puissent en trouver seuls dès le début ?

Comment amener les élèves aux démarches inductives ?

Comment les initier à la méthode analytique et au rôle de la synthèse ?

2.523 Comment faire saisir les relations logiques d'implication et d'équivalence et leur rôle dynamique dans les inférences ?

Comment apprendre à utiliser des quantificateurs ?

Comment aborder la réduction à l'absurde et la démonstration par l'absurde ?

2.524 Par quels moyens introduire la méthode axiomatique dans sa signification moderne ?

2.53 Rôle des problèmes

2.531 Les problèmes ont une importance capitale, qu'il s'agisse d'applications empiriques ou de questions intérieures à la mathématique. La résolution des problèmes met en oeuvre les démarches de la pensée mathématique (formulation, vérification d'une supposition, analyse, synthèse, généralisation, spécialisation, etc.).

L'emploi des problèmes dans l'expérience antérieure à la formation des structures est fondamental.

2.532 Souvent un problème donné aux élèves dans le cadre traditionnel a un caractère fermé : ce qu'on donne et ce qu'on demande est déterminé, de plus, ce problème est posé dans une partie du cours où la méthode de résolution s'impose d'elle-même. Il s'agit d'un pur exercice d'application formel sans appel à l'imagination créatrice. On peut en dire autant des problèmes empiriques.

Pour favoriser le pouvoir créateur des élèves — il convient de leur donner plus souvent des situations problématiques ouvertes où ils interviennent dans la formulation, dans la détermination des données et des inconnues et dans le choix de la méthode de résolution.

Il faudrait étudier le rôle dynamique de ces problèmes dans l'apprentissage.

2.533 De plus, des investigations sur les méthodes heuristiques permettraient de rendre les élèves plus conscients des démarches productives dans les résolutions de problèmes.

2.6 Moyens.

2.61 Matériels et jeux.

Certains matériels et jeux sont conçus pour présenter structures mathématiques (réglettes, blocs, films, géoplans, modèles concrets, boîtes de construction etc.).

Il faudrait faire l'inventaire des ressources en ce domaine et des recherches devrait être entreprises en vue d'évaluer la portée de ces matériels. Notamment, des investigations devraient être faites afin de savoir si pour étendre le champ d'application d'une structure, il faut varier les matériels qui la présentent. D'autre part, il conviendrait d'examiner les structures que permet d'introduire un matériel donné.

2.62 *Usage et rôle des schémas.*

2.621 Des expériences pédagogiques ont montré combien l'usage de schémas (cercles d'EULER, diagrammes de VENN, graphes, tableaux etc.) permettrait de présenter aux élèves, avec leur participation active, d'une manière élémentaire, des mathématiques réputées difficiles.

2.622 Il y a lieu d'étudier le rôle psychologique de ces schémas et de leurs particularités (formes, couleurs, dimensions, etc.) ainsi que les liens entre le soutien perceptif et la signification conceptuelle. Cette question est d'autant plus importante que les graphes qui servent à l'initiation ont un usage constant en mathématique tant pure qu'appliquée.

2.63 *Usage et rôle de la symbolisation*

Pour accroître l'efficacité de l'enseignement, il conviendrait d'entreprendre des recherches psychopédagogiques sur le rôle et l'usage des symboles qui désignent les concepts en mathématiques (objets, ensembles, relations, fonctions, opérations, etc.). Il serait très utile d'avoir notamment des réponses aux questions suivantes :

2.631 Quel est le rôle des symboles dans l'élaboration des concepts ? Quands les introduire dans l'apprentissage ?

2.632 Dans quelle mesure les manipulations concrètes d'objets à rôle symbolique peuvent-elles aider à comprendre les transformations d'écriture symbolique, voire des démonstrations ?

2.633 Quelle relation psychologique qui lie le jeu perceptif des symboles et les combinaisons correspondantes des concepts qu'ils désignent ?

De ce point de vue, les conventions habituelles, avec leurs omissions, ne présentent-elles pas d'obscurités pour le débutant ?

2.634 Faut-il favoriser le maniement des symboles en liaison avec leur signification ou introduire assez tôt la considération formelle des écritures symboliques et faire usage des analogies opératoires ?

2.635 Cet aspect formel est-il susceptible de faire saisir la structure symbolisée ?

2.7 *Coopération entre les mathématiciens, les pédagogues et les psychologues.*

2.71 Pour promouvoir la pédagogie de la mathématique, il est vivement recommandé d'assurer une coopération étroite entre les mathématiciens, les enseignants, les pédagogues et les psychologues ayant une réelle connaissance des notions modernes de la mathématique.

2.72 Il convient d'intéresser des psychologues aux problèmes que posent l'apprentissage de la mathématique et de son usage actuel et que suggère l'enseignement nouveau ?

2.73 Les résultats de leurs recherches auraient pour effet, non seulement de confirmer les enseignants dans certains des jugements issus de leur expérience courante, mais, surtout, de leur faire apercevoir les aspects psychologiques insoupçonnés de leurs moyens et de leur techniques didactiques. Dans la

période de prospection actuelle, ces derniers résultats ne manqueront pas d'avoir une répercussion favorable sur l'enseignement.

2.74 Enfin, des recherches fourniraient des matériaux, tant quantitatifs que qualitatifs, pouvant servir au fondement scientifique de la pédagogie de la mathématique.

3. FORMATION ET PERFECTIONNEMENT DES ENSEIGNANTS

3.1 Préparation mathématique des enseignants

3.11 La formation mathématique des maîtres doit être imprégnée d'un esprit moderne et les mettre à même de dominer les matières qu'ils devront enseigner.

3.13 Pour assurer une base solide à toute éducation, les enseignants des classes primaires devront recevoir un enseignement qui approfondira les matières reprises dans le programme modernisé d'enseignement secondaire et qui les préparera à l'exercice de leur mission.

3.14 Les professeurs de mathématique des écoles secondaires recevront une formation moderne spécialisée (qu'il s'agisse d'une préparation à deux niveaux ou à un niveau unique).

Cette préparation comportera

3.141 une formation mathématique générale portant notamment sur les matières fondamentales suivantes et leurs applications :

- théorie des ensembles et logique
- algèbre abstraite
- topologie
- géométrie (exposé axiomatique, utilisant les espaces vectoriels et d'autres notions d'algèbre abstraite et de topologie)

analyse
théorie des probabilités et statistique
histoire de la pensée mathématique.

3.142 Des études dans une (deux) branche scientifique (physique, chimie, biologie, économie mathématique, psychologie, etc.).

3.143 Les maîtres du niveau supérieur de l'enseignement secondaire feront une étude plus approfondie des matières fondamentales et recevront des suppléments spécialisés, par exemple, équations différentielles, intégrales et aux dérivées partielles, programmation linéaire, théorie de l'information, théorie des jeux, théorie des nombres, etc.

3.15 En principe, la préparation mathématique des professeurs des classes supérieures de l'enseignement secondaire ne pourra avoir une durée inférieure à quatre ans après les études secondaires générales.

3.2 Préparation pédagogique des enseignants de la mathématique

3.21 Tout professeur a besoin d'une culture pédagogique vivante qui ne se borne pas aux généralités de la méthodologie, de la didactique et de l'histoire de l'éducation. Il doit être ouvert aux problèmes modernes de la pédagogie.

3.22 Le futur enseignant doit connaître convenablement les grandes lignes de l'évolution psychologique de l'enfance à l'âge adulte.

Il doit posséder aussi des connaissances lui permettant de tenir compte des différences individuelles entre les élèves, de la dynamique de groupe et des effets favorables ou néfastes de son comportement en classe.

3.23 Le futur professeur devra être informé de la psychologie de la pensée, spécialement des processus d'acquisition des connaissances mathématiques modernes. Il

sera rendu attentif aux divers types de motivation et au rôle de l'affectivité dans l'apprentissage.

On veillera à lui faire acquérir une attitude ouverte et accueillante devant la pensée mathématique juvénile.

3.24 Le futur professeur étudiera la méthodologie actuelle relative à l'enseignement des matières de base qu'il devra enseigner. Ces matières seront éclairées du point de vue de la mathématique moderne.

Il fera des exercices sur les techniques particulières faisant l'objet de séminaires destinés à développer l'initiative pédagogique et l'imagination créatrice dans la résolution des problèmes didactiques.

3.25 Des stages organisés dans les écoles, sous la conduite de professeurs qualifiés, le mettront en contact avec la réalité scolaire.

3.26 La formation de l'enseignant devra ouvrir devant lui les perspectives d'une recherche scientifique en didactique et en psycho-pédagogie, en lui faisant découvrir les problèmes à résoudre et en lui fournissant les méthodes et les techniques de cette recherche, tout autant que les moyens matériels de celle-ci (livres, revues, matériel didactique et expérimental, etc.).

3.3 Formation continue des enseignants

3.31 Dans la période transitoire actuelle, pour mettre les professeurs à même d'enseigner des programmes modernes, il est d'une urgente nécessité d'entreprendre ou de poursuivre une information fondamentale du personnel en service.

3.32 Les matières de ce perfectionnement comprendront: les théories mathématiques nouvelles indispensables à l'exécution correcte des nouveaux programmes, des précisions méthodologiques permettant la mise en oeuvre efficace de ces derniers.

3.33 Pour le temps consacré à la modernisation des connaissances des enseignants on peut choisir des modalités diverses, déjà utilisées dans plusieurs pays: séances hebdomadaires régulières, week ends prolongés, périodes plus longues réparties sur l'année.

3.34 Toutes les ressources disponibles: Universités, Instituts Pédagogiques, Ecoles normales, Associations professionnelles, Centres didactiques ou pédagogiques, etc., doivent être engagés en coordination, pour rendre possible un renouveau national de l'enseignement mathématique.

3.35 Une documentation sur la mathématique d'aujourd'hui et son enseignement doit être diffusée parmi les professeurs par tous les moyens dont on dispose: cours élémentaires ou supérieurs, notes de travail, articles de revues etc., paraissant dans divers pays.

En plus, des livres spécialisés, pour professeurs, doivent être rédigés aussitôt que possible pour éclairer les enseignants, d'une façon convenable, sur le contenu, la portée des idées modernes et la méthodologie qui leur est adéquate.

3.36 Pour engager un nombre suffisant d'enseignants à se perfectionner en mathématique, il importe de leur présenter de façon objective: le mouvement international de rénovation la situation particulière de leur pays, la nécessité d'un effort planifié, leur responsabilité personnelle devant leurs élèves, l'intérêt scientifique des idées nouvelles.

De plus, il faut, dans toute la mesure du possible, aménager leurs horaires, intervenir dans leurs frais et tenir compte de leur effort de qualification pour leur classement, leur rétribution et leur avancement.

3.37 Dans l'avenir, les enseignants de la mathématique, devront, pour assumer leur fonction, se tenir à jour de façon permanente,

tant au point de vue de la mathématique que de sa méthodologie.

Il importe de maintenir ou de créer, dans chaque pays, des institutions capables d'assurer la formation continue des enseignants, cette formation étant désormais intégrée à leur métier.

3.4 Pénurie de personnel enseignants la mathématique

3.41 Devant la pénurie de professeurs de mathématique, il importe, compte tenu d'un enseignement de masse que des pays ont organisé ou se préparent à mettre sur pied, de favoriser un recrutement plus large.

3.42 Plusieurs pays ont fait face momentanément à la situation en engageant dans les écoles, après une formation pédagogique à court terme, des personnes provenant d'autres secteurs. Dans certains pays, on a été amené à faire usage de l'enseignement télévisé.

3.43 Afin de susciter des vocations, il convient de souligner les attraits de la carrière enseignante :

contact avec la jeunesse
rôle social fondamental

3.44 Il faut, sur le plan scientifique, révaloriser la fonction de professeur.

par la formation mathématique plus élevée
par le dynamisme nouveau de son métier
par la valeur de l'investigation pédagogique

Parallèlement, il est indispensable de réintégrer le professeur de la mathématique dans la société moderne en le liant ou développant scientifique, culturel et social et en lui accordant la considération et le standing auxquels lui donnent droit sa responsabilité et sa mission d'éducateur.

3.46 La rémunération trop faible est une des causes de la pénurie des enseignants.