

## A Matemática — Um Diálogo Socrático (\*)

Alfréd Rényi  
Budapeste

SÓCRATES: Meu caro Hipócrates, procuras alguém?

HIPÓCRATES: Agora não, Sócrates, pois já encontrei quem procurava; eras tu. Procurei-te em muitos lugares. No ágora disseram-me que te tinham visto a passear ao longo das margens do rio Ilisso. Aqui vim ter contigo.

S: Bem, diz então porque vieste. E já que estás aqui, também quero perguntar-te algo acerca da nossa discussão com Protágoras. Ainda te lembras dela?

H: Como é possível que me faças uma tal pergunta? Desde então, não se passa um único dia que não pense nesse assunto. Vim hoje ter contigo, para te pedir o teu con-

selho, pois a discussão não me sai da lembrança.

S: Pelos vistos, meu caro Hipócrates, ambos queremos falar sobre a mesma questão; deste modo, os dois assuntos são um e só um. Parece que os matemáticos não têm razão quando afirmam que dois nunca é igual a um.

H: Dir-se-ia, Sócrates, que possuis o poder sobrenatural de adivinhar. De facto, eu tencionava precisamente falar contigo acerca da Matemática.

S: Meu caro Hipócrates, bem sabes que não sou matemático. Porque não pões essas tuas questões ao famoso Teodoro?

H: Deixas-me perplexo, Sócrates; és capaz de responder às minhas perguntas ainda antes de eu as ter formulado. Vim ter contigo para saber a tua opinião sobre se achavas bem que me tornasse aluno de Teodoro. Já uma vez vim ter contigo com a intenção de me tornar aluno de Protágoras; dessa vez fomos juntos ter com ele e tu dirigiste a discussão de tal maneira que se tornou claro que Protágoras nem mesmo sabia o que ensinava. De modo que mudei de opinião e resolvi não o seguir. Essa discussão ajudou-me a compreender o que não devia fazer, mas não me indicou o que devia fazer. É coisa que me faz pasmar. Depois disso, tenho estado em vários banquetes e tido conversas com outros da minha idade e é verdade que passei momentos agradáveis; mas só isso não me satisfaz.

---

(\*) Trabalho publicado pela revista *Physics Today* em Dezembro de 1964, em língua inglesa, atendendo a várias sugestões para que o «Diálogo Socrático» fosse publicado, tornando-o portanto acessível a todos os que não tiveram o privilégio de escutar o discurso original do Professor RÉNYI, depois de um jantar que se efectuou durante a reunião conjunta da American Physical Society e da Canadian Association of Physicists, realizada em Agosto de 1963 em Edmonton, Alberta, Canada.

O Prof. ALFRÉD RÉNYI é um matemático, especialista em Teoria das Probabilidades e aplicações a várias ciências, nomeadamente à Física; é professor de matemática na Universidade de Budapeste e Director do Instituto de Investigação Matemática da Academia das Ciências da Hungria. O Prof. RÉNYI esteve em 1964, como professor-visitante na Universidade de Michigan, USA.

Desagrada-me a sensação de que sou ignorante e de que o meu conhecimento é incerto. Durante a discussão com Protágoras, certifiquei-me de que o meu conhecimento sobre certas noções familiares, como a virtude, a justiça e a coragem, está longe de ser satisfatório. Não obstante, parece que, neste particular, fiz progressos, pois passei a ver claramente a minha própria ignorância.

S: Satisfaz-me, meu caro Hipócrates, que compreendas tão bem. Eu próprio, muitas vezes digo que, só sei que nada sei. A diferença entre mim e os outros é que eu nem sequer imagino saber o que na realidade não sei.

H: Isso mostra claramente a tua sabedoria. Mas não me satisfaz. Tenho um forte desejo de alcançar um conhecimento exacto e sólido, e sem ele não poderei ser feliz; mas, ao mesmo tempo, hesito na espécie de conhecimento que devo tentar adquirir. Teófilo disse-me, há pouco tempo, que esta espécie de conhecimento só existe na Matemática e sugeriu-me que eu deveria aprender Matemática com Teodoro, seu mestre que, segundo ele próprio me disse, é quem mais sabe de números e geometria, em Atenas. Agora, não estou disposto a cometer o mesmo erro que fiz da outra vez, quando tinha resolvido ser discípulo de Protágoras. Por isso, diz-me, meu caro Sócrates, será certo que encontrarei esse conhecimento exacto que procuro, se aprender Matemática com Teodoro?

S: Se queres aprender Matemática, tu, filho de Apolodoro, certamente nada de melhor terás a fazer do que ir ter com Teodoro, meu amigo e a quem muito estimo. Mas tens de ser tu a decidir se queres ou não estudar Matemática. Ninguém melhor do que tu sabe do que precisa.

H: Porque te recusas a auxiliar-me, Sócrates? Porventura, te ofendi, sem o saber?

S: Compreendeste-me mal, meu jovem amigo; não estou zangado contigo. Simples-

mente, tens de ser tu a responder a uma questão para a qual, pela minha parte, não posso, de modo algum dar qualquer resposta. Quem tem que decidir o que quer fazer, somos nós. Ao meu alcance só estará, ser como a parteira, ou seja ajudar a tua decisão a nascer.

H: Meu bom Sócrates, por favor, não me recuses a tua ajuda, e se agora tens vagar, vamos começar imediatamente.

S: Assim seja, se assim o queres; vamos sentar-nos à sombra daquela árvore e começar. Mas primeiro diz-me: estás disposto a discutir da maneira que eu prefiro? Far-te-ei perguntas e tu responder-me-ás. E sabes que duma tal conversa não tirarás maior proveito do que ver mais nitidamente o que já sabes, e fazer florescer o conhecimento cujas sementes já estão na tua alma. Espero que não faças como o rei Dario que matou o chefe das suas minas porque ele apenas tinha conseguido tirar delas cobre, ao passo que o rei pensava que continham ouro. Espero que não esqueças que um mineiro apenas pode encontrar na mina o que lá está.

H: Juro que te não vou censurar. Mas, por Zeus, começemos quando antes a escavar na mina.

S: Está bem. Então diz-me lá: sabes o que é a Matemática? Suponho que sabes o que é, visto ser aquilo que queres estudar.

H: Parece-me que qualquer criança sabe isso. A Matemática é uma das ciências, até mesmo uma das mais puras.

S: Não te pedi que tecesses elogios à Matemática, mas sim que me falasses sobre a sua natureza. Se, por exemplo, eu te tivesse perguntado que arte era a dos médicos, ter-me-ias respondido que esta arte se ocupa da saúde e das doenças e procura curar o mal e preservar a saúde. Tenho ou não razão?

H: Claro!

S: Então responde: a arte dos médicos ocupa-se de qualquer coisa que existe, ou

não? Se não houvesse médicos, haveria doenças?

H: Certamente; até mesmo muitas mais do que há agora.

S: Vejamos outra espécie de arte; sejam, por exemplo, os astrónomos. Concordas comigo, quando afirmo que os astrónomos estudam os movimentos das estrelas?

H: Sem dúvida.

S: E se eu te perguntar se a astronomia se ocupa de qualquer coisa que existe, que respondes?

H: A minha resposta é afirmativa.

S: E haveria estrelas no mundo se não existissem os astrónomos?

H: Certamente que sim. E se Zeus na sua cólera destruísse toda a humanidade, as estrelas ainda continuariam a brilhar no céu durante a noite. Mas qual é a razão porque me falas de astronomia, em vez de me falares de Matemática?

S: Não estejas impaciente, meu bom amigo. Vamos considerar mais algumas artes, para depois podermos comparar com a Matemática. Como chamas tu ao homem que conhece os seres que vivem nas florestas e no fundo dos mares?

H: Chamar-lhe-ia um cientista que estuda os seres vivos da natureza.

S: E acreditas que esse homem estuda coisas que existem?

H: Sim, acredito.

S: E se eu te disser que todas essas artes se ocupam de coisas que existem, estás de acordo?

H: Completamente!

S: Então diz-me, meu jovem amigo, qual é o objecto da Matemática, quais são as coisas que os matemáticos estudam?

H: Fiz a mesma pergunta a Teéteto e ele respondeu-me que a Matemática estuda os números e as formas geométricas.

S: Bom, a resposta é clara, mas serias capaz de dizer que essas coisas existem?

H: Certamente que sim; como seria possível falar delas se não existissem?

S: Então diz-me: se não houvesse matemáticos haveria porventura números primos?

H: De facto, não sei o que hei-de responder. Parece claro que se os matemáticos raciocinam acerca dos números primos é porque eles existem, pelo menos na nossa consciência, mas se não houvesse matemáticos em parte alguma existiriam números primos.

S: Parece-te que somos levados a afirmar que os matemáticos estudam coisas que não existem?

H: Sim, parece-me que temos de admitir.

S: Investiguemos a questão sobre outro ponto de vista. Repara: escrevi o número 39 nesta tábua encerada. Podes vê-lo?

H: Sim, posso.

S: E podes tocar-lhe com a tua mão?

H: Certamente.

S: Mas então isso é possível, não obstante os números não terem existência?

H: Ó Sócrates, parece que queres passar-me uma rasteira. Vou desenhar, na mesma tábua encerada, um dragão com sete cabeças. Poderá deduzir-se que um tal dragão existe? Nunca encontrei ninguém que tivesse visto um dragão e estou convencido de que os dragões nem sequer existem, a não ser nos contos. Mas suponhamos que estou enganado e que de facto, algures, para além das colunas de Hércules, existem dragões vivos; ainda assim, esse facto nada tem a ver com o meu desenho.

S: É uma verdade o que dizes, Hipócrates, e eu concordo plenamente contigo. Mas quererá isso dizer que embora falemos acerca dos números e até os possamos escrever, mesmo assim, não existem no real?

H: Certamente.

S: Não tiremos conclusões precipitadas. Façamos antes um novo ensaio. Terei

eu razão, quando afirmo que é possível contar os carneiros que estão aqui neste prado ou contar os barcos no porto do Pireu?

H: Sim, claro que é possível.

S: E será que os carneiros e os barcos existem?

H: Claro.

S: Mas então, se os carneiros existem, o seu número também deve ser qualquer coisa que existe.

H: Tu estás a divertir-te à minha custa, Sócrates. Os matemáticos não contam carneiros. Essa tarefa compete aos pastores.

S: Queres então dizer que os matemáticos estudam, não o número de carneiros ou de barcos, ou de outras coisas, mas os números em si mesmos e que portanto se ocupam de coisas que existem apenas em suas mentes.

H: Sim, era isso mesmo o que eu queria dizer.

S: Disseste-me que, de acordo com a opinião de Teéteto, os matemáticos estudam os números e formas geométricas. Como é que explicas o que são formas? Se te perguntasse se as formas geométricas existem, que responderias?

H: Certamente que existem. Podemos, por exemplo, ver a forma de um belo vaso e senti-la até com as mãos.

S: Contudo, ainda há uma dificuldade. Se olhares para um vaso, o que vês: o vaso em si ou a sua forma?

H: Ambas as coisas.

S: Será isso o mesmo que olhar para um cordeiro: vê-se simultaneamente o cordeiro e o pêlo?

H: A comparação parece-me bem escolhida.

S: Bom, eu penso que esta comparação é tão coxa como Hefaiсто. Podes tosquiar o pêlo do cordeiro e depois disso vês separadamente o cordeiro tosquiado e o pêlo; pode-

rás, de forma semelhante, separar a forma do vaso do próprio vaso?

H: Certamente que não, e duvido que alguém afirme que o possa fazer.

S: E, não obstante, ainda acreditas que podes ver uma forma geométrica.

H: Começo a duvidar.

S: Além disso, se os matemáticos iniciassem os seus estudos pelas formas dos vasos, não teríamos que lhes chamar oleiros?

H: Certamente.

S: E se os matemáticos se dedicassem a estudar as formas dos vasos, não seria porventura Teodoro o melhor oleiro? Tenho ouvido muita gente elogiá-lo, mas ainda ninguém me disse que ele percebe qualquer coisa de olaria. Duvido mesmo que ele seja capaz de fazer uma panela. Acaso os matemáticos se ocupam com as formas das estátuas ou dos edifícios?

H: Se o fizessem seriam escultores e arquitectos.

S: Bom, meu amigo, chegámos à conclusão de que os matemáticos quando estudam a geometria não estão interessados na forma de objectos existentes, tais como vasos, mas sim em formas que apenas existem no seu pensamento. Estás de acordo?

H: Tenho de concordar.

S: Depois de estabelecermos que os matemáticos se ocupam de coisas que não existem no real, mas apenas no pensamento, investiguemos a afirmação de Teéteto, que há pouco mencionaste, de que o conhecimento matemático é o mais certo e o que nos inspira maior confiança, comparado com o conhecimento fornecido por qualquer outro ramo da ciência. Poderás dizer-me se Teéteto te deu alguns exemplos para corroborar a sua afirmação?

H: Sim, ele disse-me, por exemplo, que ninguém pode determinar exactamente a distância de Atenas a Esparta. Claro que aqueles que já percorreram o caminho entre as duas cidades poderiam chegar a um acordo

quanto ao número de dias que demoravam, mas a distância exacta, essa não pode ser determinada. Por outro lado, utilizando o teorema de Pitágoras pode determinar-se o comprimento da diagonal de um quadrado. Teéteto também me disse que é impossível indicar exactamente o número dos habitantes da Grécia. Mesmo que alguém pudesse contar todos os habitantes, nunca chegaria a um número exacto; durante a contagem certamente morreriam alguns velhos e nasceriam algumas crianças, de modo que o número total que alcançasse seria, tão só, aproximadamente correcto. Mas se perguntares a um matemático qual o número de arestas de um dodecaedro regular, ele dir-te-á que o dodecaedro é limitado por 12 faces, cada uma com 5 arestas, o que faz um total de 60; mas como cada aresta é comum a 2 faces, e portanto foi contada duas vezes, as arestas de um dodecaedro são em número de 30, e este resultado está fora de qualquer discussão.

S: Ainda te deu mais alguns exemplos?

H: Bastantes, embora não me possa recordar de todos eles. Disse-me ainda que não é possível encontrar duas coisas exactamente iguais: não há dois ovos iguais; e até mesmo as colunas do templo de Poseidon são ligeiramente diferentes umas das outras. Mas pode assegurar-te que as duas diagonais de um rectângulo são precisamente iguais. Além disso, citou-me ainda Heraclito, que afirmou que tudo se transforma continuamente e que o conhecimento rigoroso apenas é possível relativamente àquelas coisas que nunca mudam, como, por exemplo, o número que é sempre par ou ímpar, a linha recta ou o círculo.

S: Basta. Estes exemplos convencem-me de que, na Matemática, se pode alcançar um conhecimento que está fora de quaisquer dúvidas, ao passo que nas outras ciências ou no dia-a-dia tal resultado é impossível. Tentemos resumir os resultados da nossa investigação acerca da natureza da

Matemática. Estarei eu certo quando digo que chegámos à conclusão de que os estudos que são objecto da Matemática se processam sobre coisas que não existem, mas que é possível descobrir toda a verdade acerca delas?

H: Sim, é essa a conclusão que estabelecemos.

S: Mas, por amor de Zeus, meu caro Hipócrates, diz-me se não é uma coisa misteriosa poder saber-se mais acerca de coisas que não existem do que daquelas que, de facto, existem.

H: Se pões a questão desse modo, é de facto um mistério. Estou convencido de que há qualquer erro nos nossos argumentos.

S: Não, pois procedemos na nossa dedução com o maior cuidado e controlámos os nossos argumentos, passo a passo. Não é possível que, na nossa dedução, esteja envolvido erro algum. Mas escuta: parece-me que me lembrei agora de qualquer coisa que nos pode ajudar a decifrar este enigma.

H: Diz-mo depressa, pois estou verdadeiramente confuso.

S: Esta manhã estava eu no átrio da casa do segundo arconte, quando a mulher de um carpinteiro da aldeia de Pito foi acusada de ter atraído e depois assassinado o marido, com a ajuda do amante. A mulher protestou e jurou por Artemisa e Afrodite que estava inocente, que nunca tinha amado ninguém senão a seu marido e que o marido fora assassinado pelos piratas. Muitos dos presentes foram chamados como testemunhas: uns disseram que a mulher era culpada, outros que ela estava inocente. Era impossível descobrir aquilo que na realidade se passara.

H: Estás de novo a trocar de mim? Primeiro, lanças a confusão completa no meu espírito, e agora, em vez de me ajudares a descobrir a verdade, ainda me contas essas histórias!

S: Não te arrelies, meu amigo, pois

tenho sérias razões para falar desta mulher, cuja culpabilidade era impossível determinar. Mas uma coisa é certa: esta mulher existe. Vi-a com os meus olhos e podes perguntar a qualquer dos que lá estiveram, pois entre os presentes encontravam-se muitos cidadãos respeitáveis que, durante a sua vida, nunca mentiram. Podes perguntar a qualquer deles.

H: Para mim, o teu testemunho é suficiente, meu caro Sócrates. Tomemos como certo o facto dessa mulher existir. Mas que tem isso a ver com a Matemática?

S: Mais do que imaginas. Mas antes, diz-me: conheces a história da Agamémnon e de Clitemnestra?

H: Todos conhecem essa história. Assisti até, no teatro, à exibição da trilogia de Ésquilo, no ano passado.

S: Então, conta-me a história por poucas palavras.

H: Enquanto Agamémnon, rei de Argos, combatia em Tróia, sua mulher Clitemnestra cometeu adultério com Égisto, primo de seu marido. Quando, depois da queda de Tróia, Agamémnon regressou; então, a mulher e o amante assassinaram-no.

S: Diz-me Hipócrates: é absolutamente certa a culpa de Clitemnestra?

H: Não percebo porque me fazes tais perguntas. Não pode haver dúvidas acerca da história. Já Homero contou que, quando Ulisses visitou o mundo dos mortos, encontrou Agamémnon, que lhe contou ele próprio o seu triste destino.

S: Mas estás certo de que Clitemnestra e Agamémnon, bem como todos os outros personagens da história existiram realmente?

H: Talvez se eu fosse dizer aquilo que penso em público me votassem ao ostracismo; porém, a minha opinião é de que hoje, após tantos séculos, é impossível provar se as histórias que Homero narrou são verdadeiras ou falsas. Mas isto não é o ponto mais importante: quando te disse que Clitemnestra era

culpada não me quiz referir à Clitemnestra real, física (quer uma tal pessoa tenha de facto vivido ou não), mas sim à Clitemnestra da nossa tradição homérica, isto é, à Clitemnestra da trilogia de Ésquilo.

S: Posso então dizer que acerca da Clitemnestra real nada sabemos; até mesmo a sua existência é incerta, mas relativamente à Clitemnestra que é uma das personagens da trilogia de Ésquilo, temos a certeza de que ela era culpada do assassinio de Agamémnon, porque é isso o que Ésquilo nos conta. Não será assim?

H: Sim, decerto. Mas porque insistes em tudo isso?

S: Já vais ver. Deixa-me agora reunir o resultado das nossas descobertas: a respeito da mulher sensual e sanguinária que foi hoje julgada em Atenas, é praticamente impossível descobrir se é culpada ou não, ao passo que relativamente a Clitemnestra, personagem que faz parte de uma peça de teatro, e que provavelmente nunca existiu, a sua culpa não aparece dúvidas. Concordas?

H: Agora parece-me que começo a compreender o que queres dizer. Mas julgo preferível que sejas tu a tirar as conclusões.

S: A conclusão é a seguinte: temos um conhecimento muito mais seguro acerca de pessoas que existem apenas na nossa imaginação, como por exemplo os personagens de uma peça de teatro, do que de pessoas que realmente existem. Se afirmamos que Clitemnestra era culpada, isso resulta da maneira como Ésquilo a imaginou e depois a apresentou na sua peça. Relativamente à Matemática a situação é exactamente a mesma: podemos ter a certeza de que as diagonais de um rectângulo são iguais porque isso é uma consequência da definição de rectângulo, tal como é apresentada pelos matemáticos.

H: Queres com isso dizer, Sócrates, que o resultado paradoxal a que chegámos é, de facto, verdadeiro, ou seja, o conhecimento

que se pode chegar a ter acerca de coisas que não existem — como, por exemplo, as que são o objecto da Matemática — é muito mais seguro, em face do que pode alcançar-se relativamente a objectos reais da Natureza. Parece-me descortinar também a razão disso: as noções por nós criadas são, pela sua própria natureza, integralmente conhecidas, e é possível chegar a apreender-se toda a verdade acerca delas, porque são exactamente como as imaginámos, uma vez que não possuem qualquer outro suporte de realidade fora da nossa imaginação. Contudo, os objectos que existem no mundo real não são idênticos às representações que deles temos, pois estas são sempre incompletas e aproximadas e, portanto, o nosso conhecimento acerca das coisas reais nem pode ser completo nem absolutamente certo.

S: Essa é a verdade, meu jovem amigo, e tu conseguiste enunciá-la melhor do que eu.

H: O mérito pertence-te, Sócrates, pois foste tu que me guiaste até eu perceber tais razões. Já compreendo não só que Teéteto tinha toda a razão quando me dizia que se eu queria obter um conhecimento certo, teria de estudar Matemática. Até mesmo se me tornou claríssimo o motivo porque tudo isso é verdade. Mas se me conduziste até aqui com tanta paciência não me abandones ainda, porque uma das minhas dúvidas, precisamente a mais importante, ainda está por esclarecer.

S: Que dúvida é essa?

H: Sócrates, por favor, lembra-te que vim aqui para te pedir o teu conselho sobre se deveria ou não estudar Matemática. Ajuda-me a compreender que a Matemática, e só ela, me pode dar aquela espécie de conhecimento absoluto que ambiciono. Mas, para que serve afinal esse conhecimento? Com efeito, se alguém adquire conhecimentos acerca do mundo real, ainda que esses conhecimentos não sejam completamente exactos e sejam até

incompletos, são, apesar disso, de grande valor não só para o próprio como para a comunidade. Mesmo conhecimentos relativos a coisas longínquas, como as estrelas, são necessários, por exemplo, para a navegação durante a noite. Mas, qual será a utilidade do conhecimento de coisas que não existem, como é o caso da Matemática? Ainda mesmo que este conhecimento seja completo e fora de quaisquer dúvidas, para que servirá um conhecimento de coisas que na realidade não existem?

S: Meu bom amigo, estou certo que conheces a resposta, mas queres certificar-te se eu a sei ou não.

H: Por Hércules! Não sei encontrar resposta para esta pergunta. Por favor, auxilia-me.

S: Vamos tentar. Chegámos à conclusão de que as noções da Matemática são criadas pelo próprio matemático. Diz-me: será que o matemático escolhe estas noções de maneira completamente arbitrária, a seu bel-prazer?

H: Como te disse, ainda não sei muito de Matemática. Mas parece-me que o matemático tem plena liberdade para escolher os objectos que fazem parte do seu estudo mental, tal como o poeta é livre para escolher as imagens dos seus versos. E, enquanto o poeta descreve as suas figuras com as características pessoais que mais lhe agradam, o matemático pode dotar as noções que ele próprio criou com as propriedades que deseja.

S: Se isso fôsse verdade, haveria tantas Matemáticas quantos os matemáticos. Como explicas que os matemáticos estudem todos as mesmas noções e problemas? Como explicas que matemáticos, vivendo longe uns dos outros e sem quaisquer contactos, descubram, independentemente uns dos outros, as mesmas verdades? E nunca me constou que dois poetas escrevessem o mesmo poema.

H: Eu também nunca ouvi tal coisa, mas

lembro-me de Teéteto me ter contado que tinha descoberto um teorema interessante sobre distâncias incomensuráveis; mostrou, em seguida, o resultado ao seu mestre, Teodoro, que lhe mostrou uma carta de Arquitas, onde o mesmo teorema estava reproduzido, quase textualmente.

S: Na poesia isso seria impossível. Agora nota que se esconde aqui um problema. Mas vamos continuar: como explicas que os matemáticos de diferentes países possam normalmente chegar a acordo acerca da verdade, ao passo que, por exemplo, no que diz respeito à política, não só os persas e os espartanos têm ideias completamente diferentes das nossas, em Atenas, como nós próprios, os atenienses, muitas vezes, não nos entendemos?

H: A essa questão posso eu responder: em assuntos de política, todos os cidadãos estão pessoalmente interessados e os interesses pessoais de cada um são, frequentemente, contraditórios. Esta é a razão pela qual muitas vezes não é possível chegar a um acordo. Por outro lado, o matemático é guiado unicamente pelo seu desejo de descobrir a verdade.

S: Queres dizer que os matemáticos tentam descobrir a verdade, que é completamente independente das suas próprias pessoas?

H: Sim!

S: Bom, mas, desse modo, estamos enganados quando pensamos que os matemáticos escolhem os temas do seu estudo segundo a sua vontade pessoal. Parece que esses temas sobre os quais incidem os estudos dos matemáticos têm uma existência independente das suas próprias pessoas. Temos que solucionar este novo enigma.

H: Desta vez não vejo por onde começar.

S: Se ainda tens paciência, vamos ambos tentar. Diz-me: qual é a diferença entre o marinheiro que encontra uma ilha des-

conhecida e o pintor que descobre uma cor que antes dele ninguém usara?

H: Parece-me que ao tal marinheiro se pode chamar descobridor, enquanto o pintor é um inventor. O marinheiro descobre uma ilha que, antes dele, já existia mas era desconhecida; quanto ao pintor, este inventa uma nova cor que antes disso nunca tinha existido.

S: Ninguém responderia melhor do que tu. Mas diz-me: o matemático que chega ao conhecimento duma nova verdade descobre-a ou inventa-a? Podemos classificá-lo como um descobridor, como o marinheiro, ou será ele um inventor, como o pintor?

H: Parece-me que o matemático é mais parecido com o descobridor: ele procede como o navegador arrojado que navega no oceano desconhecido do pensamento e explora as suas costas, ilhas e correntes.

S: Muito bem, estou completamente de acordo contigo. No entanto, eu diria ainda que o matemático é, em certa medida, também um inventor, especialmente quando inventa novos conceitos. Mas, o descobridor tem de possuir também qualquer coisa do inventor. Se, por exemplo, o navegador quer ir a lugares onde nenhum outro navegador foi capaz de chegar antes dele, tem, para isso, que construir um barco melhor do que os barcos usados por outros navegadores. Os conceitos novos que os matemáticos inventam são como os barcos novos que descobrem mais para diante no oceano imenso do pensamento.

H: Meu caro Sócrates, ajudaste-me a encontrar a resposta para uma pergunta que se me afigurava tão difícil. O fim principal do matemático é explorar os segredos e mistérios do oceano do pensamento humano. Estes existem, independentemente do homem que é matemático, embora não da humanidade em conjunto. O matemático tem uma certa independência no inventar de novos conceitos,

que utiliza como instrumentos, e parece-me que a poderá orientar como melhor entender. Mas já não tem liberdade absoluta na invenção destes novos conceitos, pois estes têm de ser úteis para o seu trabalho. O navegador, se quiser, pode construir qualquer espécie de barco, mas é evidente que não vai cometer a loucura de construir um barco que possa ser destruído pelo primeiro temporal. Agora, tudo me parece claro.

S: Se agora consegues ver tudo claro, tenta de novo encontrar uma resposta para a pergunta: qual é o objecto da Matemática?

H: Chegámos à conclusão de que, ao lado do mundo em que vivemos, existe um outro mundo, o mundo do pensamento humano, e que o matemático é como um navegador destemido que explora esse outro mundo, sem sucumbir às preocupações, perigos e aventuras que o aguardam.

S: Meu amigo, o teu ardor juvenil quase me lança por terra; lamento porém ter de te dizer que, no teu entusiasmo, esqueceste alguns pontos que deveríamos focar durante a nossa conversa.

H: Quais?

S: Não te quero desmoralizar, mas parece-me que ainda não respondeste à pergunta mais importante, ou seja: qual é a utilidade de explorar o oceano maravilhoso do pensamento humano?

H: Meu caro Sócrates: como sempre, mais uma vez tens razão. Mas não poderias, desta vez, pôr de parte o teu método e dar-me a resposta imediatamente?

S: Não meu amigo, ainda que o pudesse fazer, não o faria, e procederia assim para teu bem. O conhecimento que se adquire sem trabalho é quase sempre inútil. Apenas chegamos a compreender aquilo que, quando muito, com algum auxílio externo, fomos nós próprios a aprender, tal como a planta que só pode utilizar a água que extrai do solo através das próprias raízes.

H: Ótimo, continuemos então com a

nossa investigação usando o mesmo método, mas ajuda-me, ao menos numa das questões.

S: Voltemos atrás, até à altura em que nos encontrávamos quando estabelecemos que os matemáticos não se ocupam com o número de carneiros, de barcos ou de qualquer outra coisa concreta, mas com os números em si mesmos. Não te parece, porém, que descobertas feitas pelos matemáticos a respeito dos números puros é também válido para os números de coisas cuja existência é autêntica? Por exemplo: os matemáticos estabeleceram que dezassete é um número primo. Não terá isto como consequência que a única maneira de distribuir dezassete carneiros por um certo número de pessoas, de tal maneira que seja igual o número de carneiros que cabe a cada uma, é dar os dezassete carneiros a dezassete pessoas, ou seja, um carneiro a cada pessoa?

H: Isso é verdade.

S: Bom, e relativamente à geometria? Não poderá o mesmo raciocínio ser aplicado à construção de casas, ao fabrico de vasos ou na determinação da quantidade de cereais que um navio pode transportar?

H: Sim, pode e é aplicado, embora me pareça que, para os fins práticos do simples artífice, não é necessário muita Matemática. As regras mais simples, que já eram conhecidas pelos servidores dos faraós no antigo Egipto, bastam para quase todos esses fins e as novas descobertas, de que Teéteto me falou com tanto entusiasmo, não são usadas nem sequer são necessárias na vida corrente.

S: Talvez ainda o não sejam, mas virão certamente a ser usadas no futuro.

H: Mas a mim, interessa-me o presente.

S: Se te queres tornar matemático, terás de compreender que trabalharás, na maior parte das vezes, para o futuro. Mas regressemos à questão mais importante: vimos que o conhecimento de um outro mundo, o mundo do pensamento, isto é, de coisas que não

existem, no sentido corrente da palavra, pode ser usado na vida de todos os dias, para responder a perguntas do mundo real. Não é surpreendente?

H: Mais do que isso: tem de ser assim; aí está um verdadeiro milagre!

S: Talvez não seja tão misterioso como parece e, se abrímos a concha desta questão, vamos encontrar dentro dela uma pérola verdadeira.

H: Por favor, meu caro Sócrates, não me fales tantos enigmas, como faz a pitonisa.

S: Diz-me então: se alguém fosse viajar em países estrangeiros muito afastados e lá tivesse visto muitas coisas e adquirido junto de outros uma experiência nova, e depois regressasse à sua cidade e utilizasse essa experiência para, sãbiamente, aconselhar os seus concidadãos, achas que seria isso uma coisa surpreendente?

H: Nem por isso.

S: Ainda mesmo que os países que este viajante tivesse visitado ficassem muito longe e fossem habitados por povos completamente diferentes, falando outras línguas e adorando outros deuses.

H: Nem mesmo neste caso, pois há muito de comum entre povos diferentes.

S: Agora diz-me: caso se reconhecesse que o mundo da Matemática, não obstante as suas características próprias, é, de certo modo, semelhante ao nosso mundo real, ainda considerarias miraculoso o facto da Matemática poder ser aplicada ao estudo do mundo real?

H: Nesse caso, não. Mas não vejo qualquer semelhança entre o mundo real e o mundo imaginário da Matemática.

S: Vês aquele penhasco na outra margem do rio, além, onde o rio transborda e forma um lago?

H: Sim, vejo.

S: E vês a imagem da rocha reflectida na água?

H: Certamente que sim.

S: Então diz-me: Qual é a diferença entre a rocha e a sua imagem?

H: A rocha é um pedaço resistente composto de uma matéria rija. É aquecida pelo Sol. Se lhe tocares, sentirás que é áspera. A imagem reflectida na água não se pode tocar; se lhe puzer a mão em cima, apalpo apenas a água fria. É um facto que a imagem reflectida não existe na realidade, é uma ilusão e nada mais.

S: E não haverá nada de comum entre a rocha e a sua imagem reflectida?

H: Sim, de certo modo, há: a imagem reflectida reproduz fielmente a rocha; até os pormenores mais insignificantes são bem visíveis na imagem reflectida. Mas que temos nós a ver com tudo isto? Queres dizer que o mundo da Matemática é uma imagem reflectida do mundo real no espelho do nosso pensamento?

S: Tu o disseste e muito bem.

H: Mas como é isso possível?

S: Vamos recapitular como se desenvolvem os conceitos abstractos da Matemática. Dissemos que o matemático se ocupa de números puros e não de números resultantes da contagem de objectos reais. Mas parece-te que alguém que nunca tenha contactado objectos reais possa aprender a noção abstracta de número? Quando uma criança aprende a contar, conta primeiro pedras e pausinhos; só quando já sabe que duas pedras mais três pedras fazem, no total, cinco pedras e que o mesmo é válido para paus ou moedas, é que percebe que dois e três são cinco. A situação é, na sua essência, a mesma com a geometria. A criança aprende a noção de esfera através de experiências realizadas com objectos redondos, como as bolas. O ser humano desenvolveu de maneira semelhante todas as noções fundamentais da Matemática. Estas noções cristalizaram-se a partir dos conhecimentos do mundo real e, deste modo, não é surpreendente, antes

mesmo natural que apresentem alguns vínculos da sua origem, tal como as crianças são parecidas com os pais. E, exactamente como as crianças, que quando crescem se tornam o amparo dos pais, do mesmo modo, qualquer ramo da Matemática, desde que esteja suficientemente desenvolvido, torna-se mais tarde um instrumento útil para exploração do mundo real.

H: Agora é que compreendo perfeitamente como é que o conhecimento das coisas que não existem, e fazem parte do mundo da Matemática, pode ser usado na vida diária. Prestaste-me um grande serviço em me ajudares a compreender isso.

S: Invejo-te, meu caro Hipócrates, porque ainda tenho dúvidas acerca de uma coisa, sobre a qual gostaria de conhecer toda a verdade. Mas talvez tu me possas auxiliar.

H: Fá-lo-ia com prazer, mas lamento verificar que estás de novo a rir-te de mim. Não me envergonhes, pedindo-me ajuda, mas diz-me francamente qual é, desta vez, a questão que esqueci.

S: Serás tu a descobri-la, se tentares reunir os resultados da nossa discussão.

H: Bom, quando se tornou claro que a Matemática é capaz de dar um conhecimento certo sobre um outro mundo, diferente do mundo em que vivemos, não se resolveu a questão da utilidade desse conhecimento. Agora descobrimos que o mundo da Matemática não é nada mais do que o reflexo do mundo real no nosso pensamento e daqui se conclui que todas as descobertas no mundo da Matemática nos dão alguma informação sobre o mundo real. Estou completamente satisfeito com esta resposta.

S: E se eu te disser que a resposta não está completa? Digo-to, não porque te queira atrapalhar, mas porque estou certo de que, mais cedo ou mais tarde, acabarias tu próprio por levantar esta questão e te aborrecerias comigo por não te ter chamado

a atenção para o facto. E depois virias perguntar-me: «Diz-me, Sócrates, faz sentido estudar a imagem reflectida, quando podemos estudar o próprio objecto?».

H: Bom, tens inteira razão, pois esta pergunta é óbvia. Tu és um feiticeiro, Sócrates, e com algumas palavras podes confundir qualquer pessoa. Além disso, és capaz de fazer ruir todo um edifício mental construído com o maior cuidado só com uma perguntinha inocente. Claro que eu diria que se podemos olhar para o objecto original, não faz sentido olhar para a imagem reflectida. Mas parece-me que o nosso modelo falha neste ponto. Há, de certeza, uma resposta para isto, mas nem sequer a vislumbro.

S: As tuas suspeitas são certas e o paradoxo surgiu porque nos agarrámos demasiado ao modelo da imagem reflectida. Um modelo é como um arco: quando se estica demasiado acaba por se partir. Deixemos este e escolhamos um outro modelo. Certamente sabes que os viajantes e marinheiros tiram muitas vantagens do uso dos mapas.

H: Eu próprio tenho experiência disso. Queres dizer que a Matemática fornece uma imagem do mundo real?

S: Tu o disseste. És agora capaz de responder à pergunta: qual é a vantagem que há em olhar para o mapa, em vez de olhar para a paisagem?

H: Isso é claro; usando o mapa podemos considerar grandes distâncias que só poderiam ser cobertas viajando durante muitas semanas ou meses. O mapa não nos mostra todos os pormenores, mas apenas as coisas mais importantes e é exactamente essa a razão por que é útil no caso de tencionarmos fazer uma grande viagem.

S: Muito bem; no entanto, há ainda mais alguma coisa que agora me ocorreu.

H: Qual é?

S: Há ainda outra razão para que seja útil o estudo da imagem matemática do universo. Se os matemáticos descobrem alguma

propriedade do círculo, isso logo nos dá alguma informação sobre qualquer objecto de forma circular. Deste modo, o método da Matemática permite-nos tratar, ao mesmo tempo, de coisas diversas.

H: Que me dizes aos exemplos seguintes: se alguém olha para uma cidade do cimo de uma montanha vizinha consegue ter uma visão melhor e mais compreensível do que se percorrer todas as suas tortas rua-zinhas. Do mesmo modo, o general que, do topo duma colina, observa os movimentos do exército inimigo tem uma imagem mais nítida da situação do que o soldado que na primeira linha apenas vê quem se encontra na sua frente.

S: Bom, agora ultrapassaste-me na invenção de novos modelos, mas como não quero ficar para trás, deixa-me ainda juntar uma parábola. Recentemente vi um quadro pintado por Aristófon, o filho de Aglaófon, e o pintor preveniu-me: «Se te aproximas assim tanto do quadro, Sócrates, apenas verás umas manchas coloridas, mas não conseguirás ver o quadro todo».

H: Claro que ele tinha razão, e tu também, quando não deixaste terminar a nossa discussão antes de termos chegado ao cerne da questão. Mas parece-me que já é altura de regressarmos à cidade, pois já as sombras da noite estão a cair e eu tenho fome e sede. Mas se ainda tens alguma paciência, gostaria de te perguntar mais uma coisa, enquanto caminhamos.

S: Muito bem, vamos andando e tu podes fazer a tua pergunta.

H: A nossa conversa deixou-me completamente convencido de que tenho de começar a estudar Matemática e estou-te muito grato por teres contribuído para isso. Mas diz-me: porque não te dedicas à Matemática? A avaliar pelo teu profundo conhecimento da Natureza real e da importância da Matemática, estou certo que ultrapassarias todos

os outros matemáticos helénicos, caso te concentrasses neste domínio. Se o quisesse, teria uma grande alegria em te seguir, como teu discípulo, em Matemática.

S: Não, meu caro Hipócrates, isso não me diz respeito. Teodoro sabe muito mais de Matemática do que eu e não encontrarás nenhum mestre melhor do que ele. Quanto à tua pergunta, porque não sou matemático, vou indicar-te as razões. Não oculto que tenho uma grande consideração pela Matemática. Penso mesmo que nós, os helenos, em nenhuma outra arte fizemos progressos mais importantes do que na Matemática, e apenas vamos no início. Se nos não exterminássemos em guerras mesquinhas alcançaríamos resultados maravilhosos, como descobridores e inventores. Perguntaste-me porque é que eu não queria fazer parte daqueles que desenvolvem esta ciência maravilhosa. De facto, eu também sou uma espécie de matemático, apenas de um género diferente. Uma voz interior (talvez se lhe possa chamar um oráculo), que sempre escuto com atenção, perguntou-me há muitos anos: «Qual é a origem dos progressos notáveis feitos pelos matemáticos na sua nobre ciência?» E respondi então: «Julgo que a origem dos bons êxitos dos matemáticos está no método que usam: o nível avançado da sua lógica, a sua competição uns com os outros, sem o menor compromisso relativamente à verdade; o seu hábito de começar sempre pelos primeiros princípios, definindo exactamente todas as noções usadas e evitando as auto-contradições». A minha voz interior respondeu: «Muito bem, Sócrates, mas porque pensas que este método de pensar e argumentar só pode ser usado para estudar números e formas geométricas? Porque é que não tentas convencer os teus concidadãos a usar o mesmo rigor lógico noutros campos, por exemplo na filosofia e na política, na discussão dos problemas da vida pública e privada de todos os

dias?» E desde esse dia, é o que sempre tenho tentado fazer. Na nossa discussão com Protágoras, como decerto te lembras, demonstrei que quem se julga sábio, é, muitas vezes, tolo e ignorante e aos seus argumentos faltam alicerces sólidos pois que, ao contrário dos matemáticos, usam noções que não são convenientemente definidas e que não perceberam completamente. No desenvolvimento desta actividade, quase todos se tornaram meus inimigos. Este facto

não é surpreendente pois sou como que um crítico, sempre atento a chamar a atenção aos que são indolentes a pensar e usam ociosamente termos obscuros. E as pessoas não gostam daqueles que constantemente lhes lembram os erros que não podem ou não querem corrigir. Chegará o dia em que cairão sobre mim para me exterminarem. Mas até esse dia, continuarei a seguir o chamamento dessa voz interior. Entretanto, tu irás ter com Teodoro e segui-lo-ás!