

MATEMÁTICAS GERAIS—ÁLGEBRA SUPERIOR—COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. C. — ÁLGEBRA SUPERIOR — Exame final, 1941

1033 — Mostrar que todo o polinómio $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$ se pode escrever com a forma

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

R: Desenvolvendo o determinante segundo os elementos da primeira linha vem

$$f(x) = a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = a_0 x^n + \Delta_{n-1}$$

Desenvolvendo Δ_{n-1} segundo os elementos da primeira linha vem $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \Delta_{n-2}$.

Procedendo para $\Delta_{n-2}, \Delta_{n-3}, \dots, \Delta_2$ como para Δ_{n-1} vem $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$.

1034 — Calcular o raio do círculo de convergência da série $1 + 5z + \frac{5^2}{2!} z^2 + \dots + \frac{5^n}{n!} z^n + \dots$.

R: Aplicando o critério d'Alembert, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{n+1} z^{n+1} / (n+1)!}{5^n z^n / n!} \right| = |z| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = |z| \cdot \frac{1}{\infty}$$

logo o raio de círculo de convergência é ∞ .

1035 — Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{(n+1)(n+2) \dots (2n)}$.

R: É sabido que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Então

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt{(n+1)(n+2) \dots (2n)} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2) \dots (2n)}{n^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+3) \dots (2n)(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+1}(n+1)(n+2) \dots (2n)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)n^n}{(n+1)^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^{n+2} + 6n^{n+1} + 2n^n}{(n+1)^{n+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

1036 — Se a equação $f(x) = 0$ de coeficientes inteiros tem uma raiz inteira e se a e b designam dois números inteiros quaisquer, mostrar que \underline{um} , pelo menos, dos números inteiros $f(a), f(a+1), \dots, f(a+b-1)$ é divisível por b . R: De-

preende-se do enunciado que a equação $f(x) = 0$ é algébrica de coeficientes inteiros e admite uma raiz inteira k . Então $f(x) = (x-k)f_1(x)$ onde $f_1(x)$ é um polinómio inteiro em x de coeficientes inteiros. Fazamos nesta igualdade, $x = a, a-1, \dots, (a+b-1)$, vem $f(a) = (a-k)f_1(a)$, $f(a+1) = (a-k+1)f_1(a+1), \dots$, $f(a+b-1) = (a-k+b-1)f_1(a+b-1)$. Dos números inteiros consecutivos $(a-k), (a-k)+1, \dots, (a-k)+b-1$, em números de $|b|$, um deles é divisível por b . Logo, dos números $f(a), f(a+1), \dots, f(a+b-1)$ um pelo menos é divisível por b .

1037 — A que condições deve obedecer o ponto variável (x, β) para que a cónica $(x-1)x^2 + 2\beta xy - (x+1)y^2 + 2\alpha x + 2\beta y - (x+1) = 0$ represente uma parábola. R: A equação dada representa uma parábola se $\beta^2 + (x+1)(x-1) = 0$ ou $x^2 + \beta^2 = 1$. Por outras palavras, a cónica será uma parábola se no plano $Ox\beta$ o ponto (x, β) pertence à circunferência de centro na origem e de raio igual à unidade, será uma elipse se o ponto (x, β) é interior à circunferência e será uma hipérbola se o ponto é exterior à mesma circunferência.

Qualquer que seja o género da cónica esta será degenerescente se se anular o invariante cúbico, ou, o que é o mesmo, se o ponto (x, β) pertence à curva de equação

$$\begin{vmatrix} x-1 & \beta & \alpha \\ \beta & -x-1 & \beta \\ \alpha & \beta & -x-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x^3 + 2\beta^2 x + 2x^2 + 2\beta^2 - \alpha(-x-1) = 0$$

que é a recta $x+1=0$ se se trata duma parábola.

1038 — Mostrar que as medianas de um triângulo são concorrentes. Encontrar o seu ponto de encontro. R: Seja o triângulo ABC. Escolhamos para sistema de referência aquele que é constituído por dois eixos ortogonais, contendo o eixo xx' o lado AB e pertencendo o vértice C ao eixo yy' . Sejam a e b as abscissas de A e B e seja c a ordenada de C. Então, as equações das medianas são $2cx + (a+b)y = (a+b)c$, $cx + (2a-b)y = ac$, $cx + (2b-a)y = bc$. Elas serão concorrentes se o sistema formado por estas equações for compatível ou, o que é o mesmo, se for nulo o característico

$$\begin{vmatrix} 2c & a+b & (a+b)c \\ c & 2a-b & ac \\ c & 2b-a & bc \end{vmatrix} = 0.$$

Esta condição é verificada, visto que a primeira linha do determinante é a soma das duas últimas.

O ponto de encontro, cujas coordenadas se obtêm pela resolução do sistema, é $(b-a)/3, c/3$.

Soluções dos n.ºs 1035 a 1038 de A. Sá da Costa.

F. C. L. — ALGEBRA SUPERIOR — Exames finais, 1941 — Alguns pontos.

1039 — Determine as equações da recta que passa pelo ponto $P(0, 2, -1)$ e pelo ponto do plano π em que é $x=2, y=1$. Calcule o ângulo que tal recta faz com o plano π . $\pi \equiv$ plano diametral da quádriga $x^2+4y^2-3z^2+3xy+4xz+2yz+3x-y+2z-6=0$ conjugado com Oz .

$$R: r = \begin{cases} x = -2y + 4 \\ z = -3y + 5. \end{cases}$$

1040 — Escreva a equação da cónica $2y^2-4xy+5x^2-2x+2y-1=0$ referida aos seus eixos e determine as coordenadas dos seus focos.

$$R: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3/2} = 1, F(\pm\sqrt{15}/2, 0).$$

1041 — Deduza a equação do plano radical das esferas Σ_1, Σ_2 e verifique que a recta dos centros é perpendicular a êsse plano. Σ_1 é a esfera que passa pelos pontos $(0, 1, 0)$ $(-1, 0, 2)$, tal que a origem tem potência 3 em relação a Σ_1 e cujo centro pertence ao plano $x=2y$. A equação de Σ_2 é $x^2+y^2+z^2+4x+2y-2z-9=0$.

$$R: \pi \equiv 6x+3y-z-6=0.$$

1042 — Escreva na forma canónica a equação da parábola $y^2-2xy+x^2-5y-7x+3=0$, e verifique que, referida a êste sistema de eixos, o diâmetro conjugado de Oy é o eixo Ox .

$$R: y^2=3\sqrt{2} \cdot x.$$

1043 — As rectas $x=0, y=0, 2x-y-8=0, x+2y-16=0$ formam um quadrilátero inscriptível. Calcule as coordenadas do centro e o raio da circunferência circunscrita.

$$R: \Sigma \equiv x^2+y^2-4x-8y=0, C(2, 4), r = \sqrt{10}.$$

1044 — Deduza a equação do plano de feixe de sêde em $r) \begin{cases} x=s \\ y=3 \end{cases}$ que corta a esfera $x^2+y^2+z^2-4x+2z-11=0$ segundo uma circunferência de raio 3. $R: x-z+\lambda(y-3)=0 \rightarrow \lambda = \frac{9+\sqrt{91}}{2}$.

1045 — Determine as equações das tangentes tiradas do ponto $(7, 1)$ para a circunferência que passa pelo ponto $(1, 2)$ e forma com $\Sigma \equiv x^2+y^2-3x+y-2=0$ um sistema do eixo radical $\epsilon \equiv 3x-y-3=0$. $R: \Sigma_1 \equiv x^2+y^2=5, t_1 \equiv x-2y-5=0, t_2 \equiv 2x-11y-3=0$.

Nota — O problema do traçado de tangentes a uma circunferência por um ponto exterior a esta resolve-se facilmente considerando que uma tal

tangente deverá passar por êsse ponto e a uma distância do centro da circunferência igual ao seu raio.

Soluções dos n.ºs 1039 a 1045 e nota do n.º 1045 de J. Pais Morais.

Contêm pontos de exames finais de *Álgebra Superior*, os seguintes números da *Gazeta de Matemática*: 4 e 7.

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de freqüência, 2 de Junho de 1942.

1046 — Dada a função $y=x^2, I(x)+1$, representá-la gráficamente no intervalo $(0, 3)$; indicar o contra-domínio correspondente, os pontos de descontinuidade e os pontos em que não admite derivada; escrever a equação da tangente no ponto $x=3/2$. $R: \text{Tem-se para } 0 \leq x < 1 \rightarrow y=1, 1 \leq x < 2 \rightarrow y=x^2+1, \text{ e } 2 \leq x < 3 \rightarrow y=2x^2+1. \text{ O gráfico pedido reduz-se pois a um segmento de recta e a 2 arcos de parábola. O contradomínio é definido por } y=1, 2 \leq y < 5 \text{ e } 9 \leq y < 28. \text{ São pontos de descontinuidade os de abscissa inteira. Nestes a função y não admite derivadas, podendo porém definir-se uma semi-derivada à esquerda e à direita.}$

Para $x=3/2$ é $y=I(3/2) \cdot (3/2)^2+1=9/4+1=13/4$ e $y'_{3/2}=2 \cdot 3/2+1=4$; a tangente tem pois por equação $Y-13/4=4(X-3/2)$.

1047 — Estudar a série de termo geral

$$u_n = \frac{2n}{3n^3+1}, \text{ e no caso da convergência determinar}$$

um limite superior do erro cometido tomando para valor aproximado da soma da série a soma dos 10 primeiros termos da série. $R: \text{Tem-se}$

$$u_n = \frac{2n}{3n^3+1} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^2} \text{ e a série dada é portanto convergente. Para a série de termo geral } \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^2},$$

majorante da dada, é fácil estabelecer um limite superior do resto, limite portanto do resto da série dada. Com efeito tomando os 9 primeiros termos

duma série de Dirichlet convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+z}}$ um

limite superior é $\frac{1}{q^z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^z}}$. No nosso caso é

$$q=10 \quad z=1.$$

1048 — Determinar a equação da superfície de revolução gerada pela rotação em torno do eixo das ordenadas da curva de equações: $(y-1)^2+(z-3)^2-4=0, x=0$. Escrever as equações dos paralelos de menor raio e de maior ordenada. $R: \text{A superfície pedida é um toro. A equação}$

obtem-se pela substituição na equação da geratriz (situada no plano $x=0$) de z por $\sqrt{x^2+z^2}$; vem: $(y-1)^2 + (\sqrt{x^2+z^2}-3)^2 - 4 = 0$, ou $(x^2+y^2+z^2 - 2y+6)^2 - 4(x^2+z^2) = 0$. O paralelo de menor raio é o gerado pelo ponto $(0,1,1)$ e tem por equações, por exemplo, $y=1$, $x^2+z^2=1$; o de maior ordenada é o gerado pelo ponto $(0,3,3)$ e tem por equações: $y=3$, $x^2+z^2=9$.

Soluções dos n.ºs 1046 a 1048 de Manuel Zaluar.

I. S. A. — 2.º Exame de frequência, 28-5-1942

1049 — Determine, pelo método de resolução das equações numéricas as raízes da equação $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$. R: São os seguintes, os resultados da resolução numérica da equação dada. A equação não tem raízes inteiras porque os divisores do termo independente ± 1 não satisfazem a equação proposta. A transformada da equação em $y = 2x$ é $y^3 - y^2 + 4y - 4 = 0$, cujo termo independente admite como divisores $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Dêstes só poderá ser raiz da transformada $+1$ visto que um limite superior das raízes positivas é 2 (método de Bret) e a equação transformada em $z = -y$ é $z^3 + z^2 + 4z + 4 = 0$, cujo primeiro membro não tem variações. O divisor $+1$ é de facto raiz. A equação $y^3 - y^2 + 4y - 4 = 0$ desembaraçada da raiz $+1$ reduz-se a $y^2 + 4 = 0$ cujas raízes são $\pm 2i$. Portanto, as raízes da equação proposta são $1, 2, \pm i$.

1050 — a) Defina coordenadas cartesianas retangulares e coordenadas esféricas de um ponto no espaço. Indique quais são os lugares geométricos das equações que se obtêm igualando a zero cada uma das seis coordenadas indicadas. b) Determine, pela aplicação do Teorema de Rouché, as posições relativas dos três planos $x - 2y + 3z - 1 = 0$, $2x + 3 = 0$, $4x - 4y + 3z - 2 = 0$. R: O sistema de equações lineares, constituído pelas equações dos três planos, é compatível e indeterminado de grau 1, visto que a matriz dos coeficientes e a dos coeficientes e dos termos independentes têm ambas característica 2. Portanto, os três planos formam feixe.

1051 — Determine a equação do plano que passa pelo ponto $P(1, 2, 0)$ e é paralelo às rectas de

equações $\begin{cases} x = s + 1 \\ y = 3s \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2s + 1 = 0 \\ y + s - 3 = 0. \end{cases}$ R: Seja

$Ax + By + Cz + D = 0$ a equação do plano. A introdução das condições contidas no enunciado conduz ao sistema de equações lineares e homogêneas em

$$A, B, C, D \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A + 2B + D = 0 \\ A + 3B + C = 0 \\ 2A - B + C = 0 \end{cases} \quad \text{o qual admite}$$

irá soluções não nulas se for $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

ou $4x + y - 7z + 6 = 0$. É esta a equação do plano.

1052 — Figure os traços dum plano π oblíquo em relação aos dois planos de projecção e as projecções duma recta r também oblíqua em relação aos mesmos planos de projecção. Determine graficamente o ângulo φ de r com π .

Contêm pontos de segundos exames de frequência de Matemáticas Gerais e Álgebra Superior os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 2, 6 e 10.

I. S. C. E. F. — Exame final, 17-7-1941

1053 — Fazer o estudo e o traçado da curva de equação $y^2 - \sin 2x = 0$. Verificar que as funções definidas por esta equação satisfazem à relação $y(xy' + y''') + 3y'y'' = 0$. R: A curva é simétrica em relação ao eixo xx' , porque $y = \pm \sqrt{\sin 2x}$. A curva não tem pontos cujas abscissas pertençam aos intervalos abertos $[k\pi, (2k+1)\pi/2]$ onde k é um número inteiro positivo ou negativo. Também não tem pontos cujas ordenadas pertençam a qualquer dos intervalos abertos $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$. Qualquer das funções definidas por $y = \pm \sqrt{\sin 2x}$ é periódica de período π . Em virtude da simetria e da periodicidade, o estudo e o traçado reduzem-se ao estudo e ao traçado da curva de equação $y = +\sqrt{\sin x}$ para $0 \leq x \leq \pi/2$. Por serem

$$y' = \cos 2x / \sqrt{\sin 2x}, \quad y'' = -\frac{\sin^2 2x + 1}{(\sin 2x)^{3/2}} \text{ e}$$

$$y''' = \frac{\cos 2x (3 - \sin^2 2x)}{(\sin 2x)^{5/2}}, \text{ o ponto } (\pi/4, 1) \text{ é de}$$

máximo para y , que é crescente no intervalo $(0, \pi/4)$ e decrescente no intervalo $(\pi/4, \pi/2)$ e a concavidade da curva está voltada no sentido dos yy negativos no intervalo $(0, \pi/2)$.

1054 — Estudar no ponto $x=1$, a derivada da função $y(x)$ assim definida: $y(1) = 0$, para $x \neq 1 \rightarrow y = (x-1)/(1+e^{1/(x-1)})$. R: A função é contínua no ponto $x=1$ porque $y(1) = 0$ por definição e $\lim_{x \rightarrow 1-0} y(x) = -0$ $\lim_{x \rightarrow 1+0} y(x) = +0$. A derivada de $y(x)$ para $x \neq 1$ é $y'(x) = x - 1/(1+e^{1/(x-1)})$ e $\lim_{x \rightarrow 1-0} y'(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y'(x) = 1$. Logo o ponto $x=1$ é de descontinuidade finita de 1.ª espécie para a

derivada $y'(x)$ e será um ponto angular para a curva de equação $y=y(x)$. Equações das tangentes no ponto $x=1: y=0$ e $y=x-1$.

1055 — Determinar com um erro inferior a $1/10$ as raízes da equação $P(x) \equiv x^4 + 3x - 11 = 0$.

R: A equação proposta não admite raízes inteiras porque dos três números $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ nenhum é divisível por 3. Não admite raízes racionais fracionárias porque o coeficiente de x^4 é igual à unidade. Da aplicação do Teorema de Descartes decorre a afirmação de que a equação proposta admite uma raiz real positiva e outra real negativa. O limite superior das raízes positivas é 3 e o inferior das raízes negativas é -3 . Para $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, $P(x)$ toma valores cujos sinais são, respectivamente, $+- - - - + +$. Logo as raízes reais pertencem aos intervalos $(-3, -2)$ e $(1, 2)$. O estudo dos sinais dos valores que $P(x)$ toma para $x = -3; -2, 9; -2, 8; -2, 7; -2, 6; -2, 5; -2, 4; -2, 3; -2, 2; -2, 1; -2$ e para $x = 1; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 1, 7; 1, 8; 1, 9; 2$ mostra que aquelas raízes pertencem aos intervalos $(-2, 1; -2)$ e $(1, 5; 1, 6)$. Os extremos destes intervalos são valores aproximados, por defeito e por excesso, das raízes reais da equação proposta, nas condições do enunciado.

I. S. T. — Exame final

1056 — Sendo $x, y, x \sqrt{e} = 1$, calcular os verdadeiros valores de y para $x=+0$ e $x=-0$.

R: Tem-se $y = 1/x \cdot x \sqrt{e}$. Portanto $\lim_{x \rightarrow +0} y =$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-1/x^2}{-1/x^2 \cdot e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{e^{1/x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{1/x}}{x} = -\infty.$$

1057 — Traçar a cônica $11x^2 + 84xy - 24y^2 = 156$ e calcular a sua excentricidade.

1058 — Mostrar que a função $y = \frac{ax-11}{x+a-12}$

é sempre crescente, ou decrescente ou constante. Determinar os valores de a correspondentes a cada

um desses três casos. R: Tem-se $y' = \frac{a^2 - 12a + 11}{(x+a-12)^2}$.

Portanto, o sinal da derivada depende só do numerador. A discussão do trinômio $a^2 - 12a + 11$, cujas raízes são 1 e 11, mostra que a derivada é nula para $a=1, 11$, é positiva para $a < 1$ ou $a > 11$ e negativa para $1 < a < 11$. Logo a função é crescente se $a < 1$ ou $a > 11$, é decrescente se $1 < a < 11$ e é constante se $a=1, 11$.

1059 — Seja uma recta r e dois pontos P e Q que se projectam sobre r em P' e Q' respectivamente. Seja $\overline{P'Q'} = c$, $\overline{PP'} = a$, $\overline{QQ'} = b$. Calcular o limite de $\overline{MP} - \overline{MQ}$ quando M , colocado em r , se afasta ao infinito num sentido ou noutro.

1060 — Sendo y uma função de x definida pela equação $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, mostrar que é $y'' = = 1/3 x^{-4/3} \cdot y^{-1/3}$ sendo y'' a 2.ª derivada de y em ordem a x .

1061 — Dados os dois planos $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ e $(\gamma - \beta)x + (z - \gamma)y + (x - 7\beta)z + 4x - 8\beta - 2\gamma = 0$, determinar os coeficientes α, β, γ de modo que estes planos sejam paralelos. Achar-se-ão três soluções, os planos correspondentes, dois a dois paralelos formam um paralelepípedo. Achar o volume deste paralelepípedo. R: Os dois planos serão paralelos se

$$\frac{\alpha}{\gamma - \beta} = \frac{\beta}{z - \gamma} = \frac{\gamma}{\alpha - 7\beta} = \lambda \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \alpha + \lambda\beta - \lambda\gamma = 0 \\ \lambda z - \beta - \lambda\gamma = 0 \\ \lambda z - 7\lambda\beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

sistema homogêneo que admitirá soluções não nulas se

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -\lambda \\ \lambda & -1 & -\lambda \\ \lambda & -7\lambda & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad 6\lambda^3 - 7\lambda^2 + 1 = 0$$

donde $\lambda = -1/3, 1/2, 1$.

Para cada um dos valores do parâmetro λ o sistema fornece, por exemplo,

$$\alpha = 1, 3, 1 \quad \beta = -2, -1, 0 \quad \gamma = -5, 5, 1$$

e as equações dos três pares de planos paralelos são

$$x - 2y - 5z = 0 \quad 3x - y + 5z = 0 \quad x + z = 0$$

$$x - 2y - 5z = 10 \quad 3x - y + 5z = -15 \quad x + z = -2.$$

Os pontos $(0, 0, 0)$, $(-15/13, -45/13, 15/13)$, $(25/13, 10/13, -25/13)$, $(-15/13, -20/13, -11/13)$ são os vértices do paralelepípedo pertencentes a três arestas concorrentes em $(0, 0, 0)$. Então o volume do paralelepípedo é

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 13/15 \\ 5 & 2 & -5 & 13/15 \\ -15 & -20 & -11 & 13 \end{vmatrix} \times \left(\frac{15}{13}\right)^2 \cdot \frac{1}{13} = \frac{338 \times 15^2}{13^3}.$$

1062 — Calcular as raízes racionais da equação $3x^3 - 5x^2 - 11x^3 + 27x^2 - 20x - 10 = 0$. R: A equação admite uma única raiz racional $-1/3$. Das restantes raízes, uma é irracional negativa e as outras três ou são irracionais positivas ou duas são complexas e uma irracional positiva.

Contêm pontos de exames finais de Álgebra Superior, os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 4 e 7.

I. S. T. — 2.ºs exames de frequência — Alguns pontos

1063 — Achar a equação da esfera que é tangente ao plano xOy no ponto $(2, 4, 0)$ e passa pelo ponto $P(0, 0, 4)$. R: A equação geral das

esferas tangentes ao plano xOy no ponto (2, 4, 0) é $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-r)^2=r^2$ onde r é o raio. Se a esfera passa pelo ponto P (0, 0, 4), as coordenadas de P satisfazão à sua equação, isto é, $4+16+(4-r)^2=r^2$ donde $r=9/2$ e a equação da esfera é $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-9/2)^2=81/4$.

1064 — Dado o ponto A (2, 4) e a recta $y=x-3$, determinar sobre esta recta dois pontos B e C tais que o triângulo ABC seja rectângulo em A e isósceles. Fazer a representação gráfica. R: Determinemos a intersecção da recta $y=x-3$ com a perpendicular baixada de A sobre ela:

$$\begin{cases} y=x-3 \\ y-4=2-x \end{cases} \begin{cases} x=9/2 \\ y=3/2 \end{cases}$$

Calculemos a distância do ponto A à recta $y=x-3$:

$$|d| = \left| \frac{2-4-3}{\sqrt{1+1}} \right| = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Os pontos B e C são as intersecções da circunferência de centro em (9/2, 3/2) e raio igual a $5/\sqrt{2}$,

com a recta dada, isto é:

$$\begin{cases} y=x-3 \\ (x-9/2)^2+(y-3/2)^2=25/2 \end{cases} \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

1065 — Desenhar os lugares geométricos de equações a) $(x^2+y^2)^2=4$ b) $x^3-y^3=0$.

R: a) A equação $(x^2+y^2)^2=4$ desdobra-se em duas das quais é o produto $x^2+y^2=2$ e $x^2+y^2=-2$. A primeira representa uma circunferência de centro na origem e de raio $\sqrt{2}$; a segunda uma circunferência de centro na origem e de raio $\sqrt{2}i$. b) A equação $x^3-y^3=0$ decompõe-se em duas $x-y=0$, $x^2+xy+y^2=0$. A primeira representa a bissectriz dos quadrantes ímpares; a segunda é uma cônica género elipse que degenera nas rectas conjugadas $2x+(1 \pm \sqrt{3}i)y=0$.

Contêm pontos de segundos exames de frequência de Álgebra Superior os seguintes números da «Gazeta de Matemática»: 2, 6 e 10.

Soluções dos n.ºs 1049 a 1065 de A. Sá da Costa.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. P. — CÁLCULO — Exame final, Junho de 1941

1066 — Determinar as curvaturas principais das secções normais da superfície $x^3y^2+y^3+z^3-3y^2+z+1=0$ no ponto (0, 1, 1).

1067 — Integrar a equação

$$y' - \frac{x^4+4x^2-1}{x(x^2-1)} y = \frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$$

1068 — A linha (l) é representada pelas equações $\begin{cases} x=\varphi(z) \\ y=\psi(z) \end{cases}$ em que z é o ângulo que a tangente em M faz com ox. Escrever as expressões das coordenadas X e Y de um ponto P do plano situado sobre a normal em M a uma distância MP=a em que a é uma constante. Relacionar a diferencial dS do arco de curva (L), lugar dos pontos P, com ds; por integração relacionar os arcos $\widehat{P_0P}$ (P_0 ponto de (L) sobre ox) e \widehat{OM} supondo $z_0 = \frac{\pi}{2}$; e calcular o comprimento do arco $\widehat{P_0P}$ em função de z supondo que (l) é a cicloide: $x=r(t-\operatorname{sen} t)$, $y=r(1-\operatorname{cos} t)$.

F. C. P. — CÁLCULO — 2.º exame de frequência, Maio de 1941

Ponto n.º 2

1069 — Integrar a equação: $x^2 y'' + x y' + 4y = -32 \cos(2 \log x) \cdot \log x$. R: Fazendo a mudança de variável independente $x=e^t$ vem. $\frac{d^2 y}{dt^2} + 4y =$

$$= 32t \cos 2t \text{ ou } \frac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 32t = 16t(e^{2it} + e^{-2it}).$$

Integral geral da equação sem 2.º membro: $y=C_1 \operatorname{sen} 2t + C_2 \cos 2t$. Integrais particulares:

$$y_1 = 16 \frac{t}{(D+2i)^2+4} \cdot e^{2it} = \left(-2it^2 + t + \frac{i}{4}\right) e^{2it} e$$

$$y_2 = \left(2it^2 + t - \frac{i}{4}\right) e^{-2it}. \text{ Integral geral:}$$

$$y = C_1 \operatorname{sen} 2t + C_2 \cos 2t + 4t^2 \operatorname{sen} 2t + 2t \cos 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t.$$

Integral geral da equação dada: $y = C_1 \operatorname{sen} 2(\log x) + C_2 \cos 2(\log x) + 4(\log x)^2 \operatorname{sen} 2(\log x) + 2(\log x) \cos 2(\log x) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2(\log x)$.

1070 — Calcular $\int_D \frac{dx dy}{xy}$. O domínio D situado no 1.º quadrante é limitado pelas linhas

$x^2+y^2=1$; $x^2+y^2=4$; $y=x$ e $y=\sqrt{3}x$. R: Calculemos o integral em coordenadas polares:

$$y \int \int \frac{2\rho d\rho d\theta}{\rho^2 \operatorname{sen} 2\theta} = 2 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{d\theta}{\operatorname{sen} 2\theta} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 \cdot \log 3.$$

1071 — Determinar as curvaturas principais da superfície $2xy+x^3-y^3+\log(z+1)=0$, no ponto (0, 0, 0). R: Cálculo de p, q, r, s, t.

$$\begin{cases} 2y+3x^2+p \frac{1}{z+1}=0 \\ 2x-3y^2+q \frac{1}{z+1}=0 \end{cases} \begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases}$$

$$6x - \frac{p^2}{(z+1)^2} + \frac{r}{z+1} = 0, \quad 2 - \frac{pq}{(z+1)^2} + \frac{s}{z+1} = 0,$$

$$-6y + \frac{q^2}{(z+1)^2} + \frac{t}{z+1} = 0. \quad \text{No ponto } (0, 0, 0)$$

temos: $r=0$, $s=-2$, $t=0$. Equação de condição: $sm^2 + (r-t)m - s = 0$, $-2m^2 + 2 = 0$, $\therefore m = \pm 1$.

$$C_n = \frac{r+2sm+tm^2}{1+m^2} = \frac{-4m}{1+m^2}. \quad C_1 = -2, \quad C_2 = 2.$$

1072 — Determinar a equação cartesiana da linha (L) tal que a distância de M ao centro da curvatura C_1 da evoluta seja igual ao quadrado do raio da curvatura de (L) em M .

As constantes de integração devem considerar-se nulas. R: Equação de condição: $\overline{C_1 M} = R^2$. Sendo C o centro de curvatura em M , tem-se:

MECÂNICA RACIONAL — FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. L. — MECÂNICA — 2.º exame de frequência, I-II-1941

1073 — Um ponto material, de massa unidade, está submetido à acção da força: $\mathbf{F} = x(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$. Determinar o seu movimento nas seguintes condições iniciais: $P_0(0, 0)$ $\mathbf{v}_0 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$. Determinar o trabalho efectuado pelo campo, quando o ponto se desloca desde $P_0(0, 0)$ a $P_1(3, 3)$ no seu movimento. R:

1) $x'' = x, \quad y'' = x.$

É então: $y'' = x''$; logo:

2) $y = x + C_1 t + C_2.$

Da 1.ª equação 1) vem:

3) $x'' - x = 0$

equação diferencial linear de coeficientes constantes, cujo integral geral é $x = C_3 e^t + C_4 e^{-t}$ e atendendo a 2) $y = C_3 e^t + C_4 e^{-t} + C_1 t + C_2$. Temos então:

4)
$$\begin{cases} x = C_3 e^t + C_4 e^{-t} \\ y = C_3 e^t + C_4 e^{-t} + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

e derivando

5)
$$\begin{cases} x' = C_3 e^t - C_4 e^{-t} \\ y' = C_3 e^t - C_4 e^{-t} + C_1. \end{cases}$$

Como — condições iniciais — para $t=0$, \dot{x} : $x=0$ $y=0$ $x'=2$ $y'=2$ vem, introduzindo estes valores em 4) e 5): $0 = C_3 + C_4$, $0 = C_3 + C_4 + C_2$, $2 = C_3 - C_4$, $2 = C_3 - C_4 + C_1$, ou seja: $C_3 = 1$, $C_4 = -1$, $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$. O movimento do ponto, nas condições iniciais dadas, é $x = e^t - e^{-t}$ $y = e^t - e^{-t}$ e efectua-se ao longo da recta $y = x$, afastando-se o ponto indefinidamente para o lado direito desta. O campo de forças dado não deriva dum poten-

$$\overline{C_1 M}^2 = \overline{C_1 C}^2 + \overline{CM}^2 \quad \text{ou} \quad R^4 = \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + R^2. \quad \text{Integrado}$$

vem: $\arcsen \frac{1}{R} = \alpha - \theta$, donde $R = \frac{1}{\sin(\alpha - \theta)}$.

Para $\alpha=0$ vem: $R = -\frac{1}{\sin \theta}$. Mas $R = \frac{ds}{d\theta}$.

$$\begin{cases} dx = \cos \theta ds = R \cos \theta d\theta \\ dy = \sin \theta ds = R \sin \theta d\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta & \begin{cases} x = -\log \sin \theta \\ y = -\theta. \end{cases} \\ dy = -d\theta \end{cases}$$

Logo $x = -\log \sin(-y)$ ou $\sin(-y) = e^{-x}$ ou $\sin y + e^{-x} = 0$.

Soluções dos números 1066 a 1072 de Jaime Rios de Sousa.

Contém pontos de exames finais de *Cálculo Infinitesimal* e de *Análise Superior* os seguintes números da «*Gazeta de Matemática*»: 4, 7, 8 e 9.

cial, visto que: $\frac{\delta X}{\delta y} \neq \frac{\delta Y}{\delta x}$. Para calcular o trabalho

pedido temos então que integrar \mathbf{F} . $dP = X dx + Y dy$ ao longo da trajectória do ponto. Teremos

$$\tau = \int_{P_0}^{P_1} x dx + y dy \quad \text{e como } y = x \text{ ao longo dessa}$$

trajectória, tem-se: $\tau = \int_0^3 2x dx = 9$.

1074 — Uma área plana e homogênea, é constituída por um quadrado de lado $2a$, encimado por uma semi-elipse de semi-eixos a e b . Determinar b de modo que o centro de gravidade da área considerada esteja sobre o lado do quadrado que é eixo da semi-elipse. R: O centro de gravidade do quadrado encontra-se no centro deste. Calculemos a posição do centro de gravidade da semi-elipse. Para referir esta posição, tomemos um sistema de z eixos ortogonais com origem no centro da elipse, e dirigidos segundo os eixos desta. As coordenadas do centro de gravidade da semi-elipse,

serão $\xi = 0$ $\eta = \frac{\iint y dx dy}{\iint dx dy}$ onde

$\iint dx dy = \text{área da semi-elipse} = \pi ab/2$. Tem-se

$$\iint y dx dy = \int_{-a}^{+a} dx \int_0^{b\sqrt{a^2-x^2}} y dy = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \frac{2ab^2}{3} \quad \text{e, portanto, } \eta = \frac{2ab^2/3}{\pi ab/2} = \frac{4}{3} \frac{b}{\pi}.$$

