explica que, mesmo entre homens e mulheres cultos do nosso tempo, exista a crença firme de que a Matemática está imóvel, acabada para sempre, e que o matemático é um repetidor do saber do passado? Esta atitude de espírito é destrutiva de novo progresso da ciência exacta como um instrumento da reconstrução social. Os seus fundamentos devem determinar-se por um estudo do papel da Matemática na sociedade moderna, como um todo, e não apenas nas suas escolas e indústrias.

Estes exemplos muito desconexos bastarão para mostrar que há lugar para uma sociologia da Matemática. Mostram também que é necessária uma análise cuidadosa das estruturas sociais antes de tentar interpretar a sua influência no estado da ciência exacta. A superficialidade só causa desânimo e faz com que o trabalho pareça irrisório. Os progressos formidáveis da história económica, durante as últimas décadas, tornaram a tarefa potencialmente possível. A história da técnica, também um factor importante do aspecto sociológico, como vimos, está ainda num estado pouco satisfatório. A falta pode suprir-se sem grande dificuldade com a abundante documentação de que se dispõe. Afortunadamente, os períodos nos quais o matemático está interessado são, em geral, os mais profundamente estudados por outros — as civilizações da China, Babilónia, Egipto antigo, Grécia clássica, Imperio Romano, Europa sob o feudalismo e depois da sua desintegração, e o capitalismo moderno. Uma excepção parece ser o primitivo mundo islâmico e a Índia antes dos maometanos, a respeito dos quais a informação sociológica é muitíssimo escassa.

Termino com um aviso final. Devemos ter sempre a consciência de que uma descoberta matemática, um estado de espírito respeitando a Matemática, um método de ensino, não são nunca explicados por uma só causa. A realidade é complexa e mesmo o acto mais modesto ou mais subtil reflecte dum modo ou de outro uma infinidade de aspectos do universo real. Não podemos afirmar que um facto particular foi causador duma ocorrência ou estado de espírito particular. Devemos descobrir o modo segundo o qual todos os factores — sociológicos, lógicos, artísticos e pessoais — desempenharam uma função no caso em estudo, não esquecendo nunca, todavia, que o homem é um ser social mesmo quando êle se preocupa com as linhas rectas dum hiper-cone num espaço hepta-dimensional.

Tradução de A. SÁ DA COSTA

---

atingiu o alfabeto», *The Education of Henry Adams* (Boston: Houghton Mifflin, 1927), p. 60. Vide também p. 449. A ansiedade de HENRI ADAMS tem o sabor dum século distante — de acôrdo com o seu próprio carácter.

Uma função contínua sem derivada

por **Henri Lebesgue**

(Publicado em *L'Enseignement Mathématique*, Vol. 38 (1939-1941), págs. 212-215)

Antes de expor o seu interessante exemplo de função sem derivada, R. Tambs Lyche nota muito justamente que a primeira função desta natureza, devida a Weierstrass, serve mal para o ensino elementar, o que me conduziu a procurar como, sob êste ponto de vista pedagógico, melhorar êste exemplo que, utilizando o desenvolvimento em série de Fourier, tem a grande vantagem de mostrar que as funções não deriváveis podem apresentar-se no decurso dum cálculo normal. Isto é fácil, e por isso a observação que se segue não é certamente nova; pode no entanto ser útil a sua publicação.

Seja, por exemplo, a função evidentemente contínua

$$(1) \qquad f(x)=\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}\operatorname{sen} 2^{n^2}x=\sum_1^\infty u_n(x)$$

tem-se

$$(2) \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_1^\infty \frac{1}{2^n h}\left[\operatorname{sen} 2^{n^2}(x+h)-\operatorname{sen} 2^{n^2}x\right].$$

O limite superior do valor absoluto do n-ésimo têrmo de (2) é também o de $|u'(x)|$, donde se deduz que o valor absoluto da soma dos $m-1$ primeiros termos de (2) é no máximo

$$\sum_1^{m-1}\frac{1}{2^n}2^{n^2}=\sum_1^{m-1}2^{n^2-n}<2^{(m-1)^2-(m-1)+1}=2^{m^2-3m+3}.$$

porque cada têrmo 2^{n^2-n} é inferior à metade do seguinte.

Demos a h os quatro valores

$$h_1=\frac{\pi}{2^{m^2+1}},\quad h_2=\frac{-\pi}{2^{m^2+1}},\quad h_3=\frac{3\pi}{2^{m^2+1}}\quad \text{e}\quad h_4=\frac{-3\pi}{2^{m^2+1}}.$$

Os arcos $\alpha_n=2^{n^2}x$ sofrem então, para $n>m$, acréscimos, positivos ou negativos, que são múltiplos inteiros de 2π e, por conseqüência, (2) reduz-se aos seus m primeiros termos.

Para $n=m$, o arco α_n sofre um acréscimo

$$\pi/2 \text{ ou } -\pi/2 \text{ ou } 3\pi/2 \text{ ou } -3\pi/2$$

donde, para $\operatorname{sen}\alpha_m$, um acréscimo $(\cos\alpha_m - \operatorname{sen}\alpha_m)$ ou $-(\cos\alpha_m + \operatorname{sen}\alpha_m)$ e a soma dos quadrados destas quantidades sendo igual a 2 uma delas pelo menos não é inferior a 1 em valor absoluto. Assim o valor absoluto do m-ésimo têrmo de (2) é pelo menos

$$\frac{1}{2^m \dfrac{3\pi}{2^{m^2+1}}} = \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi}$$

quer para h_1 e h_4, quer para h_2 e h_3, e além disso êste têrmo terá o sinal que quisermos, pois que h_1 e h_4, h_2 e h_3, dão resultados de sinais contrários. Em resumo ter-se-á

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi} - 2^{m^2-3m+3};$$

e por isso $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ aumenta indefinidamente em valor absoluto para a sucessão dos valores de h que nós associamos à sucessão dos inteiros m, e isto com o sinal que quisermos.

A função f(x) *não tem pois em nenhum ponto uma derivada determinada, nem finita, nem infinita.*

Se em vez de alunos principiantes se tratasse de alunos ao corrente dos profundos resultados de Denjoy sôbre a indeterminação da relação (2), a função $f(x)$ forneceria um exercício fácil e instrutivo: classificar os diversos valores de x nos quatro tipos previstos por Denjoy.

Tradução de J. DA SILVA PAULO

PEDAGOGIA

Secção a cargo de Bento Caraça

O TRABALHO MANUAL E A INICIAÇÃO MATEMÁTICA

por FERNANDO LOBO D'ÁVILA LIMA

Tive há anos um encontro casual com um distinto professor de matemática que me disse estar embaraçado para classificar as provas de admissão dos alunos à escola onde professava e acrescentou que a-pesar-do seu cuidado em formular preguntas das mais simples, as provas só muito fracamente satisfaziam. Suponho que o ilustre professor terá pensado muitas vezes nas causas que podem determinar uma tal insuficiência de preparação nos alunos ao fim de meia dúzia de anos de trabalho. Eu, por mim, pensei que, pondo de parte a hipótese de uma incapacidade formal do educando para assimilar estas noções, restava considerar o método usado no ensino desta ciência. De facto, estou convencido de que o ensino das matemáticas elementares teria tudo a ganhar se fôsse feito de um modo diverso, quanto possível objectivo.

Tem-se abusado do lápis e do papel ou do giz e da pedra e destarte as noções basilares ou não chegam a formar-se ou ficam mal assentes. Esquece-se muitas vezes que abstrair significa, segundo a expressão feliz de Bergson, extrair da matéria.

Para não citar senão o mais vulgar dos exemplos, preguntamos quantos são os alunos que tenham verificado, coisa facílima, a exactidão do clássico teorema de Pitágoras? Todos o papagueiam, é certo, mas poucos o viram vivo e a saltar tal como é.

Mas agora reparo que estou aqui de um modo que pode parecer impertinente, eu, um intruso em coisas da matemática pretendendo através da «Gazeta de Matemática» ensinar o Padre Nosso ao Vigário pois que isto e muito mais já o sabem os seus leitores. Não é êste o nosso fim mas antes aproveitar o honroso convite de colaboração para tornar público junto dos que mais particularmente se interessam pelos progressos do ensino, algo que por não ser só nosso nos parece deve ser conhecido.

Encarregado vai para treze anos de dirigir os cursos de Trabalhos Manuais para alunos e de iniciação para professores no Liceu de Pedro Nunes, tenho-me esforçado por contribuir, quanto possível, para uma modificação nos processos de ensinar, tornando o ensino activo de modo a criar no educando um interêsse vivo.

A criança não atinge nem pode compreender senão o que vê. Se a isto acrescentarmos, o que é essencial nessas idades, uma participação activa, a compreensão torna-se fácil.

O Trabalho Manual serve admiràvelmente êste objectivo educativo, porque a criança é, como