ANO IV - N.º 15 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO - 1943

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

Conceito de potência de conjuntos

por **L. Mendonça de Albuquerque**

1. — Diz-se que uma função φ estabelece uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois conjuntos E e F, e escreve-se $E=\varphi(F)$, quando:

1.º — A todo o elemento $p \in E$ (pertencente a E) a função φ faz corresponder um e um só elemento $q \in F$; e

2.º — A qualquer dos elementos de F corresponde um único elemento de E.

Exemplos:

I — Existe uma correspondência biunívoca entre n quaisquer números inteiros consecutivos e as n raízes distintas da equação binómia $x^n-1=0$.

II — A função $y=\dfrac{a+bx}{1+x}$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os números reais do intervalo (a,b) e os números reais do intervalo $(0,\infty)$.

As correspondências biunívocas gozam das seguintes propriedades (entre outras):

I — Formam um grupo. Isto é:

a) Se $E=\varphi(F)$ é uma correspondência biunívoca, a correspondência inversa $F=\varphi^{-1}(E)$ é da mesma natureza.

b) Se $E=\varphi(F)$ e $F=\psi(G)$ são correspondências biunívocas, o produto $E=\varphi[\psi(G)]$ é uma correspondência da mesma natureza.

II — Se $E \subset F$ (quere dizer, se E é um sub-conjunto de F) também $\varphi(E) \subset \varphi(F)$.

2. — *Teorema de Cantor-Bernstein.* Se φ e ψ são duas correspondências biunívocas tais que, sendo $E_1 \subset F$ e $F_1 \subset F$ se tem $\varphi(E_1)=F$ e $\psi(F_1)=E$, existe, nesse caso, uma correspondência biunívoca entre E e F.

(A demonstração dêste teorema encontra-se, por exemplo, em Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, pág. 104).

3. — *Potência.* Quando entre os elementos de dois conjuntos E e F se pode estabelecer uma correspondência biunívoca, diz-se que os conjuntos têm a mesma potência (são equipotentes) e escreve-se $\overline{\overline{E}}=\overline{\overline{F}}$.

Exemplos:

I — O conjunto de n quaisquer números inteiros consecutivos e o conjunto das raizes distintas da equação $x^n-1=0$ são equipotentes.

Nota — A definição de correspondência biunívoca implica a igualdade do número de elementos para conjuntos finitos equipotentes. É o que se evidencia no exemplo precedente.

II — O conjunto (x) dos números inteiros positivos é equipotente ao conjunto (y) dos números pares e positivos. Pode estabelecer-se entre êles a correspondência $y=2x$, que é biunívoca.

III — Têm a mesma potência o conjunto dos números reais dos intervalos (a,b) e $(0,\infty)$. Isso resulta da correspondência biunívoca estabelecida pela relação $y=\dfrac{a+bx}{1+x}$.

4. — *Comparação de potências.* Os exemplos precedentes estabelecem a igualdade de potências de dois conjuntos em casos em que a determinação da correspondência biunívoca entre os seus elementos é extraordinàriamente simples. Nem todos os casos oferecem porém esta simplicidade. É muitas vezes necessário relacionar com os conjuntos dados os seus sub-conjuntos. Assim, se forem dados os conjuntos E e F, podem apresentar-se os quatro casos seguintes: (Borel, ob. cit., pág. 103 e Appert, Proprietés des ensembles abstraits les plus géneraux, tomo II, pág. 55)

1.º — Existe uma correspondência biunívoca $F=\varphi(E_1)$ entre um sub-conjunto $E_1 \subset E$ e F, e