

outro número de dimensões, tal como o espaço a três dimensões? Obter-se-ia assim uma geometria muito diferente da nossa!

Mas, entre tôdas estas possibilidades, a experiência fêz-nos escolher uma: três dimensões são, como sempre se verificou, exactamente o que é preciso para descrever (de uma maneira esquemática, mas eficaz) os pontos do nosso espaço real. E, mesmo, se se tentou, como já foi dito, modificar um pouco a nossa geometria (por exemplo, considerando uma outra fórmula para a distância), nunca se foi levado a modificar o número três das dimensões, das coordenadas que variam independentemente.

Há outra possibilidade que se mantém mais ou menos em aberto: Poderia acontecer que o nosso espaço real fizesse parte de um espaço real a quatro dimensões (isto é, qualquer coisa cujo esquema deveria ser o espaço abstracto a quatro dimensões), como um plano que faz parte do espaço ordinário, que está *imerso* neste espaço. Certas propriedades geométricas diferem essencialmente, segundo se ficar no espaço, ou dêle se saia no espaço a quatro dimensões.

Para melhor compreensão, examinemos a situação no caso do plano. Comparemos a geometria no plano segundo se fica no plano, fazendo abstracção do espaço que o rodeia, ou nêle se não permanece.

Consideremos um rectângulo e um ponto interior; no plano, é impossível fazer sair o ponto do interior do rectângulo sem atravessar um dos lados; portanto, se lhe é proibido atravessá-los, se êle está *encerrado*, não pode sair sem que se lhe abra uma porta! Ora, através do espaço é isso possível: eleva-se o ponto na direcção de um terceiro eixo, perpendicular ao plano, desloca-se paralelamente ao plano, deixa-se recair no plano.

Consideremos a situação análoga no espaço: se um objecto está encerrado num armário (num cubo), é impossível fazê-lo sair sem *abrir a porta*, sem atravessar as faces, sem nelas abrir um orifício. Ora, se o nosso espaço está imerso num espaço a quatro dimensões ou mais, tal é bem possível. Pode verificar-se isso, fácil e rigorosamente, na geometria analítica do espaço a quatro dimensões, realizando, por fórmulas, o movimento necessário: desloca-se o ponto na direcção de um quarto eixo, transporta-se paralelamente ao espaço e faz-se recair no espaço, no nosso mundo.

É possível indicar outros fenómenos dêste género que poderiam produzir-se, se o nosso espaço estivesse imerso num espaço a quatro dimensões: Poderia transformar-se com um simples movimento uma luva direita numa luva esquerda, poderia resolver-se um nó fechado sem cortar o cordel, poderiam separar-se dois anéis enlaçados sem os abrir, e assim por diante.

Se tais fenómenos se produzissem regularmente e se êles fôsse confirmados por experiências físicas, o meio mais simples e claro para os reconhecer e para os formular e explicar seria o esquema de um espaço a quatro dimensões no qual se encontraria o nosso espaço. Mas, exceptuados alguns truques de prestidigitação, estes fenómenos designados como sôbrenaturais, não foram nunca observados. É um resultado empírico (como, por exemplo, a não-existência do movimento perpétuo de primeira ou segunda espécie). Para a descrição do nosso espaço e dos seus fenómenos a hipótese duma quarta dimensão é supérflua.

Tradução de A. SÁ DA COSTA  
(bolseiro do I. A. C. em Zürich)

(Continua no próximo número)

## PEDAGOGIA

### ALGUMAS REFLEXÕES SÔBRE OS EXAMES DE APTIDÃO

por Bento de Jesus Caraça

1. Os resultados dos exames de aptidão às Universidades podem fornecer elementos de interêsse sôbre êste problema que não sei se foi já estudado convenientemente — o da coordenação entre o ensino secundário e o superior.

Seria bom que tôdas as Escolas dissessem o que sôbre o assunto a sua experiência lhes indica. Vamos dar aqui hoje alguns resultados dessa experiência na Escola onde sou professor — o Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — relativos ao ano corrente e à disciplina de *Matemática*.

Propositadamente limito a minha observação a 1943

para procurar eliminar, tanto quanto possível, as oscilações, naturais num primeiro período de adaptação. Agora, com alguns anos de vigência dêste regimen, com muitos pontos publicados e acompanhados das respectivas resoluções, o elemento surpresa ou desconhecimento de orientação não deve jogar já, e a situação deve por consequência oferecer garantias de estabilidade que permita certa segurança de apreciações.

2. Começo por considerações de carácter estatístico.

Os candidatos ao exame de aptidão ao I. S. C. E. F. são de duas origens — Liceu e Ensino Técnico médio (Institutos Comerciais de Lisboa e Pôrto).

Os números de aprovações e reprovações nas duas épocas de Julho e Outubro, constam do seguinte quadro:

	JULHO		OUTUBRO		JUL. e OUT.	
	Apr.	Rep.	Apr.	Rep.	Apr.	Rep.
Liceus..	74 66%	38 54%	18 58%	13 42%	92 64%	51 36%
Ens. Téc.	18 51%	17 49%	10 59%	7 41%	28 54%	24 46%

Dêste quadro tira-se imediatamente uma conclusão perturbante — é que, salvo na época de Outubro e por uma muito escassa diferença, as percentagens de reprovações são superiores nos candidatos vindos do ensino técnico do que naqueles que vêm do Liceu. Isto é exactamente o contrário do que seria de esperar. *Há aqui qualquer coisa que não está certa* e que seria bom debater com uma certa amplitude. Professores das escolas interessadas e candidatos, todos têm, certamente, alguma coisa a dizer a êste respeito. A «Gazeta» abre as suas colunas para essa discussão.

Tem também um grande interesse a classificação de cada uma das escolas secundárias conforme os resultados obtidos pelos seus candidatos. Abstenho-me de o fazer por agora devido a ser ainda escasso o material.

Como casos dignos de nota, encontramos o Liceu de Sá da Bandeira, com cinco aprovações e uma só reprovação (em Julho), e o de João de Deus com cinco aprovações e nenhuma reprovação contando-se ainda, entre os seus candidatos, o que obteve classificação mais elevada em 1943. Como no decorrer dêste artigo terei de dizer algumas coisas duras, apraz-me citar os resultados do bom trabalho de duas escolas.

3. Encaremos agora a questão mais importante — permitem os resultados dos exames de aptidão dizer-nos alguma coisa sobre o nível do ensino médio e a forma como êle é feito?

A êste respeito, as conclusões que podem tirar-se são um tanto desoladoras. Se se pensar que se trata de pessoas, á volta dos 18 anos, cujo trabalho foi acompanhado por professores durante anos e que se sujeitaram depois, com êxito, a provas finais de saída, se se pensar nisso e depois se lerem definições como esta: «o m. m. c. de dois números é o máximo divisor comum e não comum que é divisível pelos os outros dois» (ens. téc.) ou como esta: «Polígonos são figuras planas dum número ilimitado de lados» (Liceu), ou como esta: «o logar geométrico dos lados dum ângulo é a bissectriz» (Liceu), ou ainda como esta: «são chamadas superfícies de revolução às figuras do espaço que são geradas por sólidos» (Liceu), o menos que se pode pensar é que *há qualquer coisa de muito errado no*

*fundo e que não pode continuar a deixar-se como está, sob pena de nos convertermos todos em cúmplices dum crime.*

Com tais erros de base, não se pode fazer nada de jeito e não é de-certo no ensino superior que êles podem ser emendados.

Mas não é apenas isto o que se passa. Há mais e talvez pior. Vêem-se nas provas de muitos candidatos que, no entanto, mostram não ser totalmente desprovidos de aptidões, certos hábitos e vícios de raciocínio e de comportamento em face dos resultados do seu trabalho, que são altamente perniciosos.

Julgo não se tratar de casos pessoais, dada a frequência e persistência com que se apresentam. Creio antes tratar-se de certa atitude negativa que subrepticiamente se vai introduzindo no ensino da Matemática e que o ameaça duma subversão total.

O caso é suficientemente sério para merecer a atenção não só das entidades oficialmente responsáveis pela orientação da nossa pedagogia, como de todos os trabalhadores do ensino.

Aqui vão alguns factos salientes.

4. É frequentíssimo encontrar entre os candidatos um desprezo total pelos resultados e seu possível enquadramento dentro do problema a que dizem respeito. É hoje limitadíssimo o número de candidatos que faz uma idéa clara do que seja a discussão dos resultados dum problema. Mas a coisa vai ainda mais longe e verifica-se em muitos casos uma completa indiferença, até, pela verosimilhança dos resultados.

Dos muitos exemplos que poderia apresentar, citarei os seguintes:

I. Na época de Julho, num ponto de cálculo numérico, pedia-se o cálculo da área dum triângulo equilátero de 273,47 metros de lado. Um candidato (Liceu) dá 13 metros quadrados; outro (Liceu) dá 273,468 (não diz o quê); outro (Liceu) dá 0,6871 metros quadrados! e isto como resultado dum cálculo que termina pela

$$\text{«igualdade» } \frac{273,47 \times 2}{8} = 0,6871; \text{ outro ainda (Liceu)}$$

dá, para altura do mesmo triângulo, 24,12 metros.

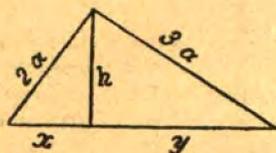
II. Na época de Outubro, num ponto de cálculo numérico, pedia-se o cálculo do volume da esfera circunscrita ao cubo cuja aresta mede 22,01 metros. Um candidato (Liceu) dá 15 metros cúbicos; outro (Liceu) 6 metros cúbicos.

III. Um candidato (Liceu) encontra para a altura dum cone 7,2 metros e para geratriz do mesmo cone 3 metros e continua imperturbavelmente o cálculo do volume do cone. Outro (ens. tec.) encontra para altura do mesmo cone o número  $h=6-3\pi$ ! e continua imperturbavelmente!

IV. Um candidato, raciocinando sobre uma figura como

a junta, encontra  $y = \frac{a}{\sqrt{13}}$ ,  $x = \frac{12a}{\sqrt{13}}$  e não nota que o resultado é absurdo!

¿Que concluir destes e outros casos? Que a única coisa que interessa na resolução dum problema é fazer determinadas operações em obediência a certas receitas. Que o resultado dê ou não dê coisa aceitável, não interessa — foi... um engano de contas e nós, como somos pessoas superiormente inteligentes, não ligamos a essas ninharias!



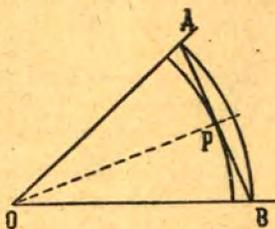
5. Outro facto saliente é a tendência a usar das receitas, mesmo quando elas dão muitíssimo mais trabalho do que pensar um pouco, ainda que seja muito pouco, sobre uma figura. Na época de Julho, num ponto de cálculo numérico pedia-se a área da corôa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um octógono regular de lado 18,31 metros.

Houve um número muito limitado de candidatos que observaram na figura que a área é  $\pi(R^2 - r^2) = \pi \frac{l^2}{4}$ .

A grande maioria seguiu um raciocínio que tem a sua expressão típica no seguinte, que reproduzo textualmente (Liceu):

Sejam:

- $R$  o raio da circunferência circunscrita
- $r$  o raio da circunferência inscrita
- $l$  o lado do octógono.



Tem-se

$$R = \frac{1}{2} l \sqrt{4+2\sqrt{2}} \quad \text{donde} \quad R^2 = \frac{1}{4} l^2 (4+2\sqrt{2})$$

$$r = \frac{1}{2} l (1 + \sqrt{2}) \quad \text{donde} \quad r^2 = \frac{1}{4} l^2 (1+2+2\sqrt{2})$$

logo

$$\begin{aligned} \pi R^2 - \pi r^2 &= \pi \frac{l^2}{4} (4+2\sqrt{2}) - \pi \frac{l^2}{4} (3+2\sqrt{2}) = \\ &= \pi \frac{l^2}{4} [(4+2\sqrt{2}) - (3+2\sqrt{2})] = \pi \frac{l^2}{4} \end{aligned}$$

6. Muitos candidatos não distinguem com clareza, de entre várias proposições apresentadas, as que eles próprios tomam como definições e como propriedades.

Um exemplo típico: Um candidato dá a seguinte definição de triângulos semelhantes — «dois triângulos dizem-se semelhantes quando têm os ângulos iguais e os lados homólogos proporcionais». E logo a seguir: Propriedades: 1.ª — «dois triângulos dizem-se semelhantes quando têm os três ângulos iguais».

7. Todas estas insuficiências, se reduzem, creio eu, fundamentalmente a duas falta de espírito crítico e automatismo. Diante do problema, a primeira reacção do candidato é procurar a fórmula que se aplica (chegam a encontrar-se expressões como esta — «aplicando o Pitágoras» — e recorro um caso ainda mais expressivo — «agora aplico pitágoras» — com  $p$  minúsculo!) e atirar-nos com o resultado, não do problema, mas da aplicação da fórmula.

¿Quais as razões deste estado de coisas? Tenho a esse respeito a minha opinião, mas seria bom que mais professores dessem a sua e. antes de mais, que se esclarecesse bem se tenho ou não razão, isto é, se é ou não verdade que o nosso ensino secundário desenvolve a falta de espírito crítico e o automatismo.

Façamos um longo debate sobre este problema que envolve, muito profundamente, uma grave questão de interesse nacional.

## ASTRONOMIA

### SÔBRE O MOVIMENTO DOS POLOS À SUPERFÍCIE DA TERRA VARIAÇÃO DAS LATITUDES

por A. Baptista dos Santos

É já vastíssima a bibliografia relativa a este problema de Astronomia que há cem anos preocupa os cientistas do Mundo inteiro sem que, até hoje, se tenha conseguido resolvê-lo completamente; e tarefa difícil é a daquele que queira expô-lo nos apertados limites de um artigo da «Gazeta», sem deixar de referir as suas fases mais importantes,

de modo a dar aos que o não conheçam uma ideia geral da sua evolução até aos nossos dias. Vamos tentar fazê-lo sem esperança de sucesso brilhante.

\*

A possibilidade do deslocamento dos polos à superfície da Terra era já do conhecimento da