Números 1 a 9. Cada número tem 8 páginas. As páginas são numeradas de 1 a 72. Os números foram publicados nas datas seguintes:

N.° 1, 1 de Novembro 1883; n.° 2, 15 de Novembro 1883; n.° 3, 1 de Dezembro 1883; n.° 4, 15 de Dezembro 1883; N.° 5, 1 de Janeiro 1884; n.° 6, 15 de Janeiro 1884; n.° 7, 1 de Fevereiro 1884; n.° 8, 15 de Fevereiro 1884; n.° 9, 1 de Março 1884.

Cada número tem duas partes: Em primeiro lugar são apresentados os problemas resolvidos, pela seguinte ordem: Aritmética, Álgebra e Geometria; depois vêem as *Questões a Resolver* pela mesma ordem.

A apresentação gráfica é nìtidamente inspirada (como mostra a figura junta) no jornal *Mathematiques Élémentaires* que se começou a publicar em França em 1877 ([6]).

Depois desta tentativa para lançar um jornal português de matemática elementar só temos conhecimento da existência do *Tira-Teimas* ([7]), que apareceu há poucos anos e que interrompeu também a sua publicação, (com o n.° 9 se não estamos em êrro).

Porque terão falhado estas tentativas? Não terá o nosso país necessidade dum jornal de matemática elementar? Não existirá um grupo de professores do ensino secundário, capaz de realizar uma missão desta natureza? Não haverá nenhum editor capaz de o publicar? Não serão os estudantes do ensino secundário capazes de apoiar uma tal iniciativa?

Mas então porque não tem hoje um continuador o *Jornal de Mathematica Elementar* fundado há 60 anos, em 1 de Novembro de 1883?

---

(6) Foi neste mesmo ano que Gomes Teixeira começou a publicar o seu Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas. Não encontrámos no Jornal de Gomes Teixeira nenhuma referência à existência do Jornal de Matemáticas Elementares.

(7) Jornal dactilografado e litografado.

A IDÉIA DE DIMENSÃO

por **Beno Ekmann**

(Encarregado de curso na Faculdade de Ciências e na Escola de Engenharia da Universidade de Lausanne e *privat dozent* na Escola Politécnica Federal de Zürich)

Lição inaugural proferida em 1943, Fevereiro, 5 e publicada na *Revue de Théologie et de Philosophie*, n.° 127, Abril-Junho de 1943

1. A idéia de dimensão, embora uma das mais intuïtivas e antigas da Geometria, não foi objecto duma teoria exacta e satisfatória senão desde há vinte ou trinta anos e só nêstes últimos tempos atingiu uma certa perfeição. O problema, abordado já nos *Elementos de Euclides*, foi retomado à volta de 1900 sob um novo aspecto, entre outros, pelo célebre matemático *Henri Poincaré*, cujas idéias estão na base das investigações ulteriores que originaram uma das mais belas teorias geométricas.

Se vou tentar apresentar-vos alguns resultados e idéias simples sôbre o assunto — sob a forma mais ou menos incompleta que o quadro desta lição me impõe e que espero seja desculpada pelos meus colegas matemáticos — é porque creio que se trata duma coisa de que se fala muito freqüentemente, ao dizer que o espaço tem três dimensões, que uma superfície tem duas, que o tempo tem uma dimensão, ao fazer alusão, com um subentendido misterioso, à quarta dimensão — sem bem entender o que se compreende por isso e sem saber que se trata de um problema de importância fundamental para a Geometria e para tôdas as ciências.

Todavia, considero tudo isto apenas como um exemplo, e o objectivo da minha exposição será atingido se conseguir dar-vos uma idéia das relações bastante delicadas que existem entre a intuição, a experiência e a abstracção e que são características da maneira de pensar e de trabalhar na Geometria moderna.

2. Encaremos o nosso problema: o nosso espaço é a três dimensões, uma curva é a uma dimensão, etc., ¿ Que significa isto? Quais são as razões e as conseqüências dêste facto?

Antes de tudo: ¿Que é o espaço? Precisamos de distinguir duas coisas: o espaço da nossa intuição e experiência, onde nós vivemos chamá-lo-ei no que se segue *espaço real* (sòmente como abreviatura, pois há diferentes espécies ou gradações de realidade) — e *espaço geométrico* que é uma criação abstracta do espírito.

O *espaço real* - não quero tentar dar dêle uma definição fechada; as suas propriedades são mais ou menos imprecisas; pois os objectos considerados não são pontos, rectas, etc., mas arestas de um corpo, raios luminosos, retículos, planos mais ou menos rugosos, figuras desenhadas duma maneira pouco exacta; e, se se tentasse tornar mais exactas as propriedades dêstes objectos por aproximações sucessivas, nada se conseguiria, mesmo teòricamente; ¿ como obter, por exemplo, uma recta precisa, sendo a matéria composta de átomos ou moléculas em movimento térmico? E, um raio luminoso, desde que se tente torná-lo suficientemente fino, começa a dispensar-se! Pode mesmo afirmar-se que as propriedades de todos os objectos se modificam no tempo — — segundo os nossos meios e possibilidades experimentais. Sem maior discussão, pretendemos admitir que tudo o que se diz do espaço real é verdadeiro num sentido ingénuo e não inteiramente definitivo.

No *espaço geométrico,* as coisas são muito diferentes. Os seus objectos têm propriedades inteiramente exactas: elas são ou axiomas que se não demonstram, ou teoremas que se demonstram com o auxílio dos axiomas e da dedução lógica. Mas, ¿que são êstes objectos? Nada dêles se diz; não são, em todo o caso, os objectos inexactos do espaço real, mas seres abstractos que possuem apenas as propriedades que lhes foram atribuídas sob a forma de axiomas. Estes axiomas não são, portanto, seguramente, nem verdadeiros, nem falsos, nem evidentes, mas, simplesmente, postulados, convenções que se impõem a seres abstractos chamados pontos, rectas, etc. Estas convenções são, naturalmente, inspiradas pelo real; elas idealizam as coisas que se constataram no real de um modo bastante grosseiro. Mas elas ultrapassam tudo o que o real pode dar-nos: se se diz, por exemplo, que duas rectas se intersectam num ponto, ou se se fala do comportamento no infinito, sôbre isso o espaço real não nos dá nunca informações precisas e directas. Há, portanto, uma grande parte de arbitrário nos axiomas; assim, ¿o espaço geométrico será uma construção puramente lógica que se baseia sôbre convenções arbitrárias? Felizmente êle é mais do que isso, mais do que um simples jôgo lógico: êle é uma imagem esquemática do espaço real, extrêmamente útil de resto; dêle nos servimos a todo o momento na nossa vida, na técnica, nas ciências.

Concluindo: o espaço geométrico é uma construção lógica cuja base é constituída pelos axiomas, isto é, convenções arbitrárias do ponto de vista lógico, mas inspiradas pelo real e, consequentemente justificadas. O espaço geométrico não é idêntico ao espaço real, mas é — para usar uma expressão devida a *Gonseth* — um esquema simples e eficaz.

Naturalmente, é possível criar outras geometrias, escolhendo para base da construção lógica axiomas um pouco diferentes e tal se tem feito. É então a experiência que nos leva a preferir, como esquema do espaço real, uma dessas geometrias às outras. A geometria ordinária ou euclideana é considerada como a mais simples e a mais eficaz para as necessidades ordinárias; mas, é possível que, em casos extraordinários, em Astronomia ou em Atomística, por exemplo, sejamos forçados a preferir um outro esquema.

3. Agora, que destinguimos bem duas coisas, espaço real. de um lado, e espaço geométrico, do outro, podemos precisar a nossa pregunta:

¿A que propriedades do espaço geométrico abstracto nos referimos ao dizer que o espaço real é a três dimensões?

Para responder, é muito simples o método seguinte: Todo o ponto do espaço geométrico pode ser caracterizado por três números reais, denominados coordenadas; observemos que, de uma maneira análoga, se fixa um ponto de uma recta por um número (isso se faz nas réguas) e um ponto do plano por dois números (tal se faz sôbre qualquer carta topográfica). As três coordenadas de um ponto P do espaço são, por exemplo, as três distâncias de P a três planos perpendiculares dois a dois, ou as duas coordenadas da projecção de P no plano horizontal e a altura acima dêsse plano.

Se se fazem variar êstes três números, independentemente uns dos outros, obtêm-se todos os pontos do espaço. Conhecendo as coordenadas de dois pontos do espaço pode calcular-se a sua distância por uma fórmula simples; por intermédio das coordenadas podem calcular-se ângulos, deduzir propriedades geométricas com simples cálculos, etc. — é o método bem conhecido sob o nome de *geometria analítica.* Nesta geometria, um ponto é *três números,* e o espaço é o conjunto que se obtém quando se fazem variar, independentemente, êsses três números. Por isto se diz que o espaço geométrico tem três dimensões, entendendo por número de dimensões o número de coordenadas que variam independentemente.

4. Esqueçamos agora, por um momento, a significação exterior do espaço geométrico, esqueçamos que êle é o esquema do espaço real. Então, não se compreende o papel extraordinário do número três nesta construção, visto ser evidente que a mesma construção lógica pode fazer-se com quatro, cinco ou um número qualquer n de coordenadas; obtém-se então o espaço a n coordenadas ou a n dimensões.

Um ponto dêste *espaço a* n *dimensões* é n *números reais,* e obtém-se todo o espaco, se se fazem variar independentemente êstes n números. Nêle pode fazer-se a *geometria analítica:* a distância de dois pontos calcula-se, a partir das coordenadas, com o auxílio de uma fórmula análoga à do caso de três dimensões, etc.

É inútil preguntar se êste espaço a quatro, cinco, ou n dimensões existe ou não — êle é, simplesmente, uma construção lógica que não pretende dar informações sôbre qualquer coisa de real — o espaço a três dimensões não as dá também; pode servir como esquema do espaço real, eis o seu papel particular! (De resto, o espaço a duas dimensões é, duma maneira análoga, o esquema do plano, e o de uma dimensão o da recta).

Preguntar-se-à: ¿Não poderia tomar-se, para o esquema do espaço real o espaço a quatro, cinco ou a outro número de dimensões, tal como o espaço a três dimensões? Obter-se-ia assim uma geometria muito diferente da nossa!

Mas, entre tôdas estas possibilidades, a experiência fêz-nos escolher uma: três dimensões são, como sempre se verificou, exactamente o que é preciso para descrever (de uma maneira esquemática, mas eficaz) os pontos do nosso espaço real. E, mesmo, se se tentou, como já foi dito, modificar um pouco a nossa geometria (por exemplo, considerando uma outra fórmula para a distância), nunca se foi levado a modificar o número três das dimensões, das coordenadas que variam independentemente.

Há outra possibilidade que se mantém mais ou menos em aberto: Poderia acontecer que o nosso espaço real fizesse parte de um espaço real a quatro dimensões (isto é, qualquer coisa cujo esquema deveria ser o espaço abstracto a quatro dimensões), como um plano que faz parte do espaço ordinário, que está *imerso* neste espaço. Certas propriedades geométricas diferem essencialmente, segundo se ficar no espaço, ou dêle se saia no espaço a quatro dimensões.

Para melhor compreensão, examinemos a situação no caso do plano. Comparemos a geometria no plano segundo se fica no plano, fazendo abstracção do espaço que o rodeia, ou nêle se não permanece.

Consideremos um rectângulo e um ponto interior; no plano, é impossível fazer sair o ponto do interior do rectângulo sem atravessar um dos lados; portanto, se lhe é proibido atravessá-los, se êle está *encerrado*, não pode sair sem que se lhe *abra uma porta!* Ora, através do espaço é isso possível: eleva-se o ponto na direcção de um terceiro eixo, perpendicular ao plano, desloca-se paralelamente ao plano, deixa-se recair no plano.

Consideremos a situação análoga no espaço: se um objecto está encerrado num armário (num cubo), é impossível fazê-lo sair sem *abrir a porta,* sem atravessar as faces, sem nelas abrir um orifício. Ora, se o nosso espaço está imerso num espaço a quatro dimensões ou mais, tal é bem possível. Pode verificar-se isso, fácil e rigorosamente, na geometria analítica do espaço a quatro dimensões, realizando, por fórmulas, o movimento necessário: desloca-se o ponto na direcção de um quarto eixo, transporta-se paralelamente ao espaço e faz-se recair no espaço, no nosso mundo.

É possível indicar outros fenómenos dêste género que poderiam produzir-se, se o nosso espaço estivesse imerso num espaço a quatro dimensões: Poderia transformar-se com um simples movimento uma luva direita numa luva esquerda, poderia resolver-se um nó fechado sem cortar o cordel, poderiam separar-se dois anéis enlaçados sem os abrir, e assim por diante.

Se tais fenómenos se produzissem regularmente e se êles fôssem confirmados por experiências físicas, o meio mais simples e claro para os reconhecer e para os formular e explicar seria o esquema de um espaço a quatro dimensões no qual se encontraria o nosso espaço. Mas, exceptuados alguns truques de prestidigitação, êstes fenómenos designados como sôbrenaturais, não foram nunca observados. É um resultado empírico (como, por exemplo, a não-existência do movimento perpétuo de primeira ou segunda espécie). Para a descrição do nosso espaço e dos seus fenómenos a hipótese duma quarta dimensão é supérflua.

Tradução de A. SÁ DA COSTA
(bolseiro do I. A. C. em Zürich)

(Continua no próximo número)

PEDAGOGIA

ALGUMAS REFLEXÕES SÔBRE OS EXAMES DE APTIDÃO

por **Bento de Jesus Caraça**

1. Os resultados dos exames de aptidão às Universidades podem fornecer elementos de interêsse sôbre êste problema que não sei se foi já estudado convenientemente — o da coordenação entre o ensino secundário e o superior.

Seria bom que tôdas as Escolas dissessem o que sôbre o assunto a sua experiência lhes indica. Vamos dar aqui hoje alguns resultados dessa experiência na Escola onde sou professor — o Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras — relativos ao ano corrente e à disciplina de *Matemática.*

Propositadamente limito a minha observação a 1943 para procurar eliminar, tanto quanto possível, as oscilações, naturais num primeiro período de adaptação. Agora, com alguns anos de vigência dêste regimen, com muitos pontos publicados e acompanhados das respectivas resoluções, o elemento surpreza ou desconhecimento de orientação não deve jogar já, e a situação deve por conseqüência oferecer garantias de estabilidade que permita certa segurança de apreciações.

2. Começo por considerações de carácter estatístico. Os candidatos ao exame de aptidão ao I. S. C. E. F. são de duas origens — Liceu e Ensino Técnico médio (Institutos Comerciais de Lisboa e Pôrto).